

# Trabajo Fin de Grado

## Grado Ingeniería Aeroespacial

### Modelización micromecánica de materiales compuestos: comparativa entre modelos analíticos y numéricos (MEF)

Autor: Antonio Castro Sánchez

Tutor: Luis Rodríguez de Tembleque Solano

Cotutor: Enrique García Macías

**Dep. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras**  
**Escuela Técnica Superior de Ingeniería**  
**Universidad de Sevilla**

Sevilla, 2018





Trabajo Fin de Grado  
Grado Ingeniería Aeroespacial

# **Modelización micromecánica de materiales compuestos: comparativa entre modelos analíticos y numéricos (MEF)**

Autor:

Antonio Castro Sánchez

Tutor:

Luis Rodríguez de Tembleque Solano

Profesor Titular de Universidad

Cotutor:

Enrique García Macías

Doctor Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos

Dep. Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras

Escuela Técnica Superior de Ingeniería

Universidad de Sevilla

Sevilla, 2018



Trabajo Fin de Grado: **Modelización micromecánica de materiales compuestos: comparativa entre modelos analíticos y numéricos (MEF): comparativa entre modelos analíticos y numéricos (MEF)**

Autor: Antonio Castro Sánchez

Tutor: Luis Rodríguez de Tembleque Solano

Cotutor: Enrique García Macías

El tribunal nombrado para juzgar el Proyecto arriba indicado, compuesto por los siguientes miembros:

Presidente:

Vocales:

Secretario:

Acuerdan otorgarle la calificación de:

Sevilla, 2018

El Secretario del Tribunal



# Agradecimientos

---

*A mi familia, por apoyarme incondicionalmente en todo momento.*

*A mis amigos, a aquellos que se han hecho por el camino y a aquellos que nunca se han ido. Por todos esos ratos que hemos pasado juntos y los que aún están por llegar.*

*Y a mis profesores, especialmente a aquellos que se esfuerzan día a día en la docencia para conseguir una escuela mejor, y a mi tutor por su gran ayuda en este proyecto.*

*Antonio Castro Sánchez*

*Sevilla, 2018*





# Índice

---

<b>Agradecimientos</b>	<b>vii</b>
<b>Índice</b>	<b>ix</b>
<b>Índice de Tablas</b>	<b>xi</b>
<b>Índice de Figuras</b>	<b>xiii</b>
<b>Notación</b>	<b>xvii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>19</b>
<b>2 Modelos micromecánicos de los materiales compuestos</b>	<b>23</b>
2.1 <i>Leyes de comportamiento</i>	23
2.1.1 Materiales monoclinicos	25
2.1.2 Materiales ortótropos	25
2.1.3 Materiales transversalmente isótropos	26
2.1.4 Materiales isótropos	26
2.2 <i>Constantes ingenieriles</i>	27
2.3 <i>Modelos micromecánicos</i>	29
2.3.1 Ley de mezclas	30
2.3.2 Ley de mezclas modificada: Modelo de Hopkins y Chamis	34
2.3.3 Modelo de Hashin y Shtrikman	35
2.3.4 Ecuaciones de Halpin-Tsai	36
<b>3 RVE para la implementación numérica de un modelo micromecánico</b>	<b>39</b>
3.1 <i>Concepto de volumen representativo</i>	39
3.2 <i>Análisis local-global</i>	40
3.3 <i>Condiciones de contorno periódicas</i>	41
3.4 <i>Implementación numérica</i>	42
<b>4 Ejemplos de aplicaciones</b>	<b>45</b>
4.1 <i>Implementación de un modelo de fibra continua</i>	45
4.1.1 Modelo y mallado	46
4.1.2 Obtención de la matriz de rigidez	50
4.1.3 Obtención de las constantes del material	66
4.2 <i>Implementación de un modelo de inclusiones esféricas</i>	71
4.2.1 Modelo y mallado	72
4.2.2 Obtención de la matriz de rigidez	74
4.2.3 Obtención de las constantes del material	83
<b>5 Resumen y conclusiones</b>	<b>87</b>
5.1 <i>Resumen</i>	87
5.2 <i>Conclusiones</i>	87
5.3 <i>Trabajos futuros</i>	88
<b>Referencias</b>	<b>89</b>
<b>Anexos</b>	<b>91</b>
A. <i>Rutinas de ANSYS</i>	91
FibraContinua.mac	91

<i>B. Rutinas de MATLAB</i>	97
ANSYS_Results_Fibra.m	97

# ÍNDICE DE TABLAS

---

Tabla 2–1. Resumen de las constantes ingenieriles en función del tipo de material.	28
Tabla 2–2. Resultados de la ley de mezclas para un compuesto de fibra con $E_m = 3.5GPa$ , $\nu_m = 0.35$ y $E_f = 73GPa$ , $\nu_f = 0.22$ .	34
Tabla 2–3. Resultados de la ley de mezclas modificada para un compuesto de fibra con $E_m = 3.5GPa$ , $\nu_m = 0.35$ y $E_f = 73GPa$ , $\nu_f = 0.22$ .	35
Tabla 2–4. Valores del parámetro adimensional de refuerzo $\xi$ para distintos modelos micromecánicos. Datos extraídos de [9].	37
Tabla 2–5. Resultados del modelo de Hill para un compuesto de fibra con $E_m = 3.5GPa$ , $\nu_m = 0.35$ y $E_f = 73GPa$ , $\nu_f = 0.22$ .	37
Tabla 2–6. Resultados del modelo de Kerner para un compuesto de inclusiones esféricas con $E_m = 207GPa$ , $\nu_m = 0.30$ y $E_f = 703GPa$ , $\nu_f = 0.22$ .	38



# ÍNDICE DE FIGURAS

---

Figura 1-1. Relación entre el año del primer vuelo y la fracción de peso de materiales compuestos para distintos aviones.	19
Figura 1-2. Uso de materiales compuestos en el B787.	20
Figura 2-1. Ejemplo de CCA para obtener las propiedades de un compuesto de fibra corta.	30
Figura 2-2. Modelo empleado para la obtención de la ley de mezclas. Figura extraída de [16].	31
Figura 2-3. Estado de carga para determinar la ley de mezclas mediante un estado de isodeformación. Figura extraída de [16].	31
Figura 2-4. Estado de carga para determinar la ley de mezclas inversa mediante un estado de isotensión. Figura extraída de [16].	32
Figura 2-5. Comparación entre los resultados experimentales y la predicción de la ley de mezclas para el módulo de Young longitudinal $E1$ . Figura extraída de [16].	33
Figura 2-6. Comparación entre los resultados experimentales y la predicción de la ley de mezclas inversa para el módulo de Young transversal $E2$ . Figura extraída de [16].	33
Figura 2-7. Esquema del modelo de Hopkins y Chamis. Figura extraída de [17].	34
Figura 3-1. Ejemplos de volúmenes representativos para compuestos de fibra corta. (a) Fibras alineadas distribuidas aleatoriamente. (b) Celda unitaria para modelo periódico. Modelos propuestos en [13] y [18].	39
Figura 3-2. Tipología de los RVE que se ensayarán en este documento durante la obtención de resultados. En el caso compuestos de fibra, la dirección de las fibras se corresponde con el eje 1.	40
Figura 3-3. Esquema representativo de las distintas escalas en el análisis de un material compuesto. Para un punto $x$ en la escala macroscópica del material podemos considerar un RVE heterogéneo en la escala microscópica con distintas propiedades en cada punto $y$ . Figura extraída de [19].	40
Figura 3-4. Esquema sobre la obtención de las propiedades efectivas del compuesto a partir del RVE mediante un <i>análisis local</i> . Figura extraída de [15].	41
Figura 4-1. Tipología del RVE propuesto para el modelo de fibra continua. De la figura (a) puede deducirse la relación entre las dimensiones $a2$ y $a3$ . Figuras extraídas de [15].	46
Figura 4-2. Mallado grueso del modelo para una fracción volumétrica de fibra pequeña $\nu_f = 0.10$ .	47
Figura 4-3. Mallado medio del modelo para una fracción volumétrica de fibra pequeña $\nu_f = 0.10$ .	47
Figura 4-4. Mallado fino del modelo para una fracción volumétrica de fibra pequeña $\nu_f = 0.10$ .	48
Figura 4-5. Mallado grueso del modelo para una fracción volumétrica de fibra elevada $\nu_f = 0.75$ .	48
Figura 4-6. Mallado medio del modelo para una fracción volumétrica de fibra elevada $\nu_f = 0.75$ .	49
Figura 4-7. Mallado fino del modelo para una fracción volumétrica de fibra elevada $\nu_f = 0.75$ .	49
Figura 4-8. Tensión $\sigma_1$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.	50
Figura 4-9. Tensión $\sigma_2$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ . Modelo de fibra	

continua.	51
Figura 4-10. Tensión $\sigma_3$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.	51
Figura 4-11. Tensión $\sigma_{23}$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.	52
Figura 4-12. Tensión $\sigma_{13}$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.	52
Figura 4-13. Tensión $\sigma_{12}$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.	53
Figura 4-14. Deformación $\epsilon_1$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.	53
Figura 4-15. Tensión $\sigma_1$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.	54
Figura 4-16. Tensión $\sigma_2$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.	55
Figura 4-17. Tensión $\sigma_3$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.	55
Figura 4-18. Tensión $\sigma_{23}$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.	56
Figura 4-19. Tensión $\sigma_{13}$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.	56
Figura 4-20. Tensión $\sigma_{12}$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.	57
Figura 4-21. Deformación $\epsilon_2$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.	57
Figura 4-22. Tensión $\sigma_1$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ . Modelo de fibra continua.	58
Figura 4-23. Tensión $\sigma_2$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ . Modelo de fibra continua.	59
Figura 4-24. Tensión $\sigma_3$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ . Modelo de fibra continua.	59
Figura 4-25. Tensión $\sigma_{23}$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ . Modelo de fibra continua.	60
Figura 4-26. Tensión $\sigma_{13}$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ . Modelo de fibra continua.	60
Figura 4-27. Tensión $\sigma_{12}$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ . Modelo de fibra continua.	61
Figura 4-28. Deformación $\epsilon_{23}$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ . Modelo de fibra continua.	61
Figura 4-29. Tensión $\sigma_1$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{12} = 1$ . Modelo de fibra continua.	62
Figura 4-30. Tensión $\sigma_2$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{12} = 1$ . Modelo de fibra continua.	63
Figura 4-31. Tensión $\sigma_3$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{12} = 1$ . Modelo de fibra	

continua.	63
Figura 4-32. Tensión $\sigma_{23}$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{12} = 1$ . Modelo de fibra continua.	64
Figura 4-33. Tensión $\sigma_{13}$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{12} = 1$ . Modelo de fibra continua.	64
Figura 4-34. Tensión $\sigma_{12}$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{12} = 1$ . Modelo de fibra continua.	65
Figura 4-35. Deformación $\epsilon_{12}$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{12} = 1$ . Modelo de fibra continua.	65
Figura 4-36. $E_1$ frente a $\nu f$ para los resultados del FEM en fibra continua con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.	67
Figura 4-37. $\nu_{12}$ frente a $\nu f$ para los resultados del FEM en fibra continua con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.	68
Figura 4-38. $E_2$ frente a $\nu f$ para los resultados del FEM en fibra continua con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.	69
Figura 4-39. $G_{12}$ frente a $\nu f$ para los resultados del FEM en fibra continua con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.	70
Figura 4-40. $G_{23}$ frente a $\nu f$ para los resultados del FEM en fibra continua con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.	71
Figura 4-41. Disposición FCC (Cúbica centrada en las caras).	72
Figura 4-42. Mallado grueso del modelo para una fracción volumétrica de fibra pequeña $\nu f = 0.10$ .	73
Figura 4-43. Mallado fino del modelo para una fracción volumétrica de fibra pequeña $\nu f = 0.10$ .	73
Figura 4-44. Mallado grueso del modelo para una fracción volumétrica de fibra elevada $\nu f = 0.65$ .	74
Figura 4-45. Mallado fino del modelo para una fracción volumétrica de fibra elevada $\nu f = 0.65$ .	74
Figura 4-46. Tensión $\sigma_1$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ .	75
Figura 4-47. Tensión $\sigma_2$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ .	76
Figura 4-48. Tensión $\sigma_3$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ .	76
Figura 4-49. Tensión $\sigma_{23}$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ .	77
Figura 4-50. Tensión $\sigma_{13}$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ .	77
Figura 4-51. Tensión $\sigma_{12}$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ .	78
Figura 4-52. Deformación $\epsilon_1$ en cada elemento para una deformación media $\epsilon_1 = 1$ .	78
Figura 4-53. Tensión $\sigma_1$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ .	80
Figura 4-54. Tensión $\sigma_2$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ .	80
Figura 4-55. Tensión $\sigma_3$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ .	81
Figura 4-56. Tensión $\sigma_{23}$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ .	81
Figura 4-57. Tensión $\sigma_{13}$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ .	82
Figura 4-58. Tensión $\sigma_{12}$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ .	82
Figura 4-59. Deformación $\epsilon_{23}$ en cada elemento para una deformación media $\gamma_{23} = 1$ .	83
Figura 4-60. $E$ frente a $\nu f$ para los resultados del FEM en inclusiones esféricas con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.	84
Figura 4-61. $G$ frente a $\nu f$ para los resultados del FEM en inclusiones esféricas con distintos	

refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.	85
Figura 5-1. Caracterización de la interfase entre fibra y matriz.	88
Figura 5-2. Ejemplos de RVE para compuestos trenzados.	88



# Notación

---

$\sigma_{ij}$	Tensor de tensiones
$\epsilon_{ij}$	Tensos de deformaciones
$\sigma_i$	Pseudovector de tensiones
$\epsilon_i$	Pseudovector de deformaciones
$\gamma_{ij}$	Deformación tangencial en el plano ij
$C_{ij}$	Tensor de rigidez
$S_{ij}$	Tensor de flexibilidad
$E_i$	Módulo de Young en la dirección i
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$G$	Módulo de cizalladura
$K$	Módulo de rigidez volumétrica
$k$	Módulo de rigidez volumétrica en deformación plana
$f$	Fibra/Refuerzo
$m$	Matriz
$v_f$	Fracción volumétrica de fibra/refuerzo
$a_i$	Semilongitud del volumen representativo en dirección i
$d_f$	Diámetro de fibra/Diámetro de la inclusión
$\bar{\sigma}_i$	Pseudovector de tensión media
$\bar{\epsilon}_i$	Pseudovector de deformación media
$\bar{C}_{ij}$	Tensor de rigidez media
$\bar{S}_{ij}$	Tensor de flexibilidad media
$\sigma_i^p$	Pseudovector de tensión periódico
$\epsilon_i^p$	Pseudovector de deformación periódico
$V_e$	Volumen de cada elemento
$\sigma_i^e$	Pseudovector de tensión de cada elemento
$\epsilon_i^e$	Pseudovector de deformación de cada elemento
$\bar{C}_{\text{FEM}}$	Tensor de rigidez calculado mediante elementos finitos
$\bar{C}_{\text{TEO}}$	Tensor de rigidez teórico para una cierta ley de comportamiento



# 1 INTRODUCCIÓN

La evolución tecnológica ha estado siempre fuertemente ligada al desarrollo de nuevos materiales cuyas propiedades sean capaces de satisfacer unos requisitos cada vez más exigentes. La idea de combinar dos tipos de materiales para conseguir uno con mejores características ha estado presente desde la antigüedad a través de las aleaciones. Estas han mostrado ser lo suficientemente resistentes y maleables para que su uso se haya extendido enormemente en todo tipo de aplicaciones, incluidas la de barcos y vehículos. No obstante, el desarrollo de la industria aeronáutica durante el siglo XX trajo consigo la necesidad de utilizar materiales que, siendo cada vez más livianos, fueran capaces de soportar cargas cada vez mayores. Es por ello que la investigación sobre materiales compuestos ha prosperado, y su uso se ha ido extendiendo cada vez más.

La importancia de los materiales compuestos en la industria aeronáutica se ha ido consagrando a lo largo de los años. Los modelos más avanzados como el B787 y el A350 ya presentan más del 50% de su peso asociado a materiales compuestos. En una industria en la que el peso penaliza enormemente el consumo de combustible, y por tanto los gastos para la compañía, el uso de materiales compuestos en los nuevos diseños se ha vuelto indispensable para fabricar aviones cada vez más eficientes. Esto se ha visto favorecido por la mejora en las técnicas de fabricación de materiales compuestos, que nos permiten actualmente fabricar grandes laminados de geometría compleja a menor coste.

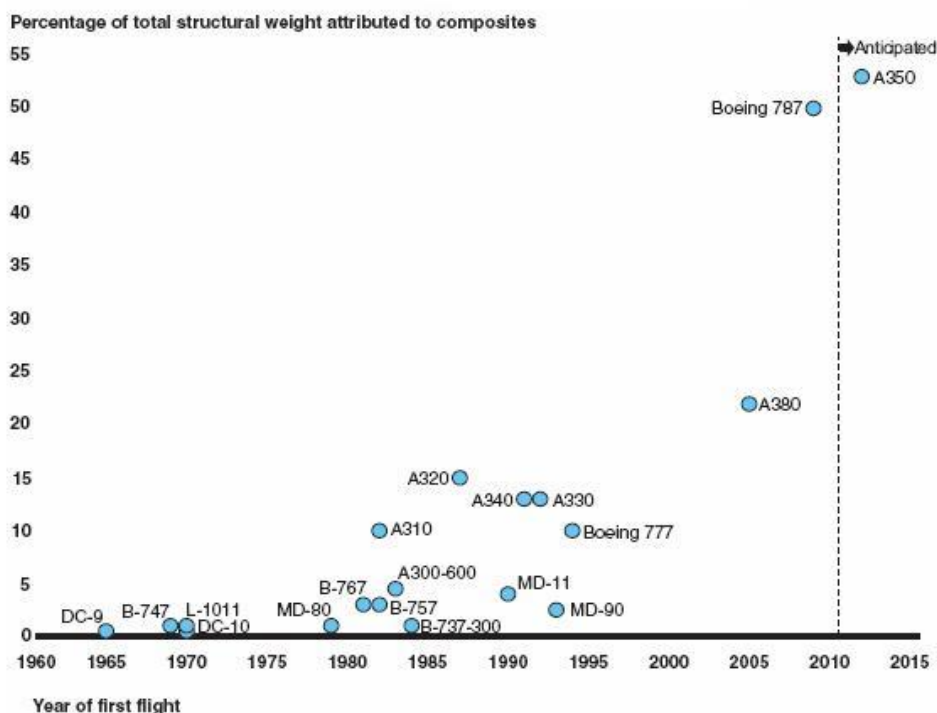


Figura 1-1. Relación entre el año del primer vuelo y la fracción de peso de materiales compuestos para distintos aviones.

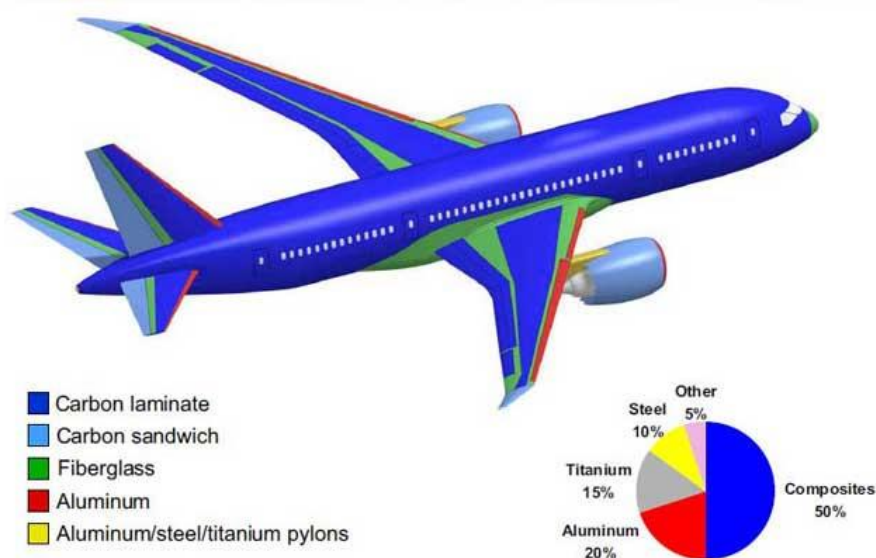


Figura 1-2. Uso de materiales compuestos en el B787.

La necesidad de fabricar compuestos de diversas características estructurales ha permitido que se desarrollen técnicas de *diseño de compuestos*. Controlando la forma en que se dispone la matriz y el refuerzo durante su fabricación, así como la cantidad de material de cada una de las fases, somos capaces de obtener compuestos de distintas propiedades mecánicas. Ejemplo de esto es el apilado de láminas en distintas direcciones, lo que nos permite conseguir un laminado con una dirección favorable de carga.

Es por todo esto que la *predicción de las propiedades* de este tipo de materiales ha pasado a ser un tema de gran interés. Para ello se han propuesto diversas técnicas basadas en distintos *modelos micromecánicos*. Las primeras estimaciones de las propiedades mecánicas de compuestos fueron realizadas mediante las ecuaciones de *Voigt* [1] y *Reuss* [2], más conocidas como *leyes de mezclas*, y simplificaban el problema suponiendo la misma deformación o tensión en todas las fases. Más adelante se demostró que estas ecuaciones representaban los límites superior e inferior de las propiedades del compuesto, y se establecieron otros límites basados en *principios energéticos* (Hill [3]) y en *principios variacionales* (Hashin y Shtrikman [4]). Los métodos basados en establecer límites dieron paso a los *modelos auto suficientes*. Estos modelos suponían una microestructura concreta para resolver el problema elástico y obtener las propiedades efectivas del material. Ejemplos son el modelo de fibra continua de Hill [5] (aunque resuelto por Hermans [6]), el modelo de inclusiones esféricas de Kerner [7] y el modelo de fibra corta de Cox [8]. Con el objetivo de condensar los resultados de distintos modelos, Halpin y Tsai revisaron los resultados obtenidos hasta la fecha y demostraron que era posible recogerlos en una única formulación que dependía de un cierto parámetro de refuerzo. En [9] se hizo una revisión de estas ecuaciones. Los grandes avances en computación permitieron emplear el *Método de los Elementos Finitos (MEF)* para resolver numéricamente los modelos. Esto ha conducido a los más recientes *modelos numéricos* en los que mediante una técnica de *homogenización* somos capaces de obtener las propiedades del material a partir de una *celda* o *volumen representativo*. Un precursor de este método fue Aboudi con su trabajo [10]. Implementaciones más recientes de este método pueden encontrarse en [11], [12] y [13], donde se aplican en modelos de fibra continua y fibra corta tanto alineadas como distribuidas aleatoriamente.

En este trabajo se pretende hacer una revisión de los modelos micromecánicos que han sido propuestos a lo largo de los años y comparar sus resultados con los obtenidos a través de modelos basados en el MEF. Esto se hará para el caso de compuestos con fibra circular, continua y alineada y en el caso de inclusiones de tipo esférico. Una vez definidos los modelos que se emplearán para la resolución del problema elástico en el software de elementos finitos ANSYS, podremos extraer y analizar los resultados obtenidos mediante MATLAB y comprobar la validez de los modelos comúnmente aceptados mediante gráficas comparativas. De esta forma,

dispondremos de una potente herramienta que nos permitirá estudiar compuestos con cualquier otro tipo de estructura micromecánica interna.

A continuación, se detallará la estructura del documento y el contenido de cada capítulo:

- **Capítulo 2: Micromecánica de los materiales compuestos**

Aquí se pretende dar a conocer los modelos micromecánicos más importantes, haciendo especial hincapié en los modelos empleados para la comparación con los resultados obtenidos en el Capítulo 4. Comenzaremos con un somero resumen de las leyes de comportamiento de la Teoría de la Elasticidad que nos permiten caracterizar los distintos tipos de compuestos. También se explicarán las constantes ingenieriles más importantes debido al gran significado físico que guardan. Finalmente, se recogen los modelos micromecánicos con sus consideraciones y formulación matemática.

- **Capítulo 3: RVE para la implementación numérica de un modelo micromecánico**

El objetivo de este capítulo es profundizar sobre el concepto de volumen representativo (*Representative Volumen Element, RVE*), usado en los distintos modelos del Capítulo 2. Desarrollar la idea de los análisis local y global es fundamental para entender como somos capaces de obtener las propiedades del compuesto a partir de un volumen que representa una pequeña parte de este. En este apartado también se pretende cerrar el problema elástico dando las condiciones de contorno, que surgen de una técnica de homogenización que se basa en la periodicidad del compuesto. Para acabar, se explicará brevemente en qué consiste el MEF y cuáles son las ecuaciones que nos permiten obtener las propiedades efectivas a partir de la solución del problema elástico.

- **Capítulo 4: Ejemplos de aplicaciones**

En este capítulo se recogen los resultados numéricos obtenidos mediante el método descrito en el capítulo anterior y constituye la parte principal de este trabajo. En este apartado se hace hincapié en las propuestas de solución elegidas, refiriéndonos al software y a los códigos empleados. Comenzaremos describiendo los modelos usados, que serán un modelo de fibra continua en disposición hexagonal, y un modelo de inclusiones esféricas en disposición FCC. Para ambos modelos se mostrarán numérica y gráficamente las soluciones del problema elástico. También se muestran las gráficas comparativas y se hacen valoraciones de los resultados obtenidos.

- **Capítulo 5: Conclusiones**

Finalmente se hará un resumen del trabajo realizado y se enumerarán las conclusiones más importantes a las que se ha llegado. Igualmente se propondrán trabajos futuros íntimamente relacionados con la metodología aquí utilizada.

- **Anexos**

En los anexos se recogen el conjunto de códigos de ANSYS y MATLAB usados para la resolución del problema.



## 2 MODELOS MICROMECÁNICOS DE LOS MATERIALES COMPUESTOS

SE recomienda consultar la norma UNE 50136:1997: Documentación, presentación de tesis y documentos similares. Por otro lado, existen recursos en línea que ayudan a organizar todo el proceso de elaboración del Trabajo. El **personal de la Biblioteca** imparte formación y asesoramiento sobre su uso.

Para establecer la estructura y orden de los datos y partes del Trabajo Fin de Grado nos basamos en la **Normativa de los Trabajos Fin de Grado** de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Sevilla (Aprobada en la sesión de la Junta de Escuela de 12 de julio de 2013, modificada en Junta de Escuela de 05 de febrero de 2014) y en la norma UNE 50136:1997: Documentación, presentación de tesis y documentos similares.

### 2.1 Leyes de comportamiento

Antes de presentar los modelos micromecánicos analíticos se procede a hacer una breve descripción de las leyes de comportamiento más importantes, haciendo especial hincapié en aquellas que describen con mayor precisión la estructura interna de los materiales compuestos.

Puesto que nos estamos moviendo dentro de la **teoría de la elasticidad lineal**<sup>1</sup> podemos establecer una relación biunívoca entre tensiones y deformaciones, relación que se caracteriza de forma general a través del **tensor de rigidez**:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (2-1)$$

A partir de ahora aprovecharemos la simetría de los tensores de tensión y deformación y se usará la **formulación compacta** para definir la relación anterior. En esta los tensores pasan a ser pseudovectores formados por las componentes significativas de cada uno. Por lo tanto, definimos el pseudovector de tensiones de la siguiente forma:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & \sigma_6 & \sigma_5 \\ \sigma_6 & \sigma_2 & \sigma_4 \\ \sigma_5 & \sigma_4 & \sigma_3 \end{bmatrix} \rightarrow \sigma_i = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2-2)$$

En el caso del tensor de deformaciones se tiene un cambio en la definición de las componentes tangenciales. Se definen las deformaciones tangenciales de la siguiente forma:

<sup>1</sup> En esta teoría haremos las suposiciones de pequeñas deformaciones y desplazamientos lo que nos permitirá, sin pérdida de generalidad, obtener las constantes elásticas de materiales compuestos.

$$\gamma_{ij} = 2\varepsilon_{ij} (i \neq j) \quad (2-3)$$

Definida así, la deformada tangencial representa el ángulo que se alejan o se aproximan las caras de un cubo sometido a este tipo de deformación. Además, permite una relación directa con la tensión tangencial en materiales ortótropos a través del módulo de cizalladura, como se verá más adelante. Con este cambio de notación, definimos el pseudovector de deformaciones de la siguiente forma:

$$\varepsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & \varepsilon_6/2 & \varepsilon_5/2 \\ \varepsilon_6/2 & \varepsilon_2 & \varepsilon_4/2 \\ \varepsilon_5/2 & \varepsilon_4/2 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} \rightarrow \varepsilon_i = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2-4)$$

Por tanto, la relación (2-1) pasaría a definirse de forma general (esto es, para un material anisótropo) mediante 21 constantes:

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j \quad (2-5)$$

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & Sim & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

Puede hacerse un desarrollo análogo para el **tensor de flexibilidad**  $S_{ij}$ , lo que permite establecer la relación inversa:

$$\mathbf{S} = [\mathbf{C}]^{-1} \quad (2-7)$$

$$\varepsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (2-8)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & S_{15} & S_{16} \\ & S_{22} & S_{23} & S_{24} & S_{25} & S_{26} \\ & & S_{33} & S_{34} & S_{35} & S_{36} \\ & & & S_{44} & S_{45} & S_{46} \\ & Sim & & & S_{55} & S_{56} \\ & & & & & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

La simetría del tensor  $C_{ij}$  viene dada por una propiedad de la energía de deformación en el modelo considerado: al no tener en cuenta las pérdidas de energía en forma de calor es posible definir una función potencial **densidad de energía de deformación** en la que la energía potencial almacenada no depende del camino recorrido si no



de las deformaciones finales alcanzadas. Además, cabe destacar que el tensor  $C_{ij}$  viene dado en un sistema de referencia concreto, luego este depende del sistema de referencia elegido. Si se considera un material con simetría elástica, esto es, simetría en las constantes elásticas en dos direcciones perpendiculares al plano de simetría, es posible reducir el número de constantes que caracterizan su ley de comportamiento nada más que comparando los tensores expresados en dos sistemas de referencia equivalentes. La demostración de estas propiedades y la reducción del número de constantes puede encontrarse en [14] y [15].

Atendiendo a las propiedades de simetría elástica que presenten, podemos clasificar los materiales en diversos tipos: **materiales monoclinicos**, **materiales ortótropos** y **materiales isótropos**.

### 2.1.1 Materiales monoclinicos

Se entienden por materiales monoclinicos aquellos que presentan un único plano de simetría elástica. Suponiendo el plano 2-3 de simetría, las leyes de comportamiento en tensiones y deformaciones quedan:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & C_{34} & 0 & 0 \\ \hline C_{14} & C_{24} & C_{34} & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{56} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2-10)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & S_{14} & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & S_{24} & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & S_{34} & 0 & 0 \\ \hline S_{14} & S_{24} & S_{34} & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & S_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{56} & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (2-11)$$

Por lo tanto, la ley de comportamiento de los materiales monoclinicos queda completamente definida mediante **13 constantes**.

### 2.1.2 Materiales ortótropos

Se entienden por materiales ortótropos aquellos que presentan tres planos de simetría elástica. Puede demostrarse que, teniendo dos planos de simetría, el tercer plano perpendicular a los anteriores también es de simetría (ver [15]). Con esta configuración las leyes de comportamiento quedan:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2-12)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{13} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (2-13)$$

Por lo tanto, la ley de comportamiento de los materiales ortótropos queda completamente definida mediante **9 constantes**. Puede apreciarse que una vez se tienen tres planos de simetría se consiguen desacoplar las componentes normales y tangenciales.

### 2.1.3 Materiales transversalmente isótropos

Si el material posee un eje de simetría por el que pasan infinitos planos de simetría elástica decimos que se trata de un material transversalmente isótropo. Entonces se cumple que las propiedades del material no varían para cualquier dirección perpendicular a dicho eje de simetría. Si suponemos el eje 1 como eje de simetría, se cumplen las siguientes relaciones entre las componentes de los tensores de rigidez y flexibilidad:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (C_{22} - C_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2-14)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{23} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2(S_{22} - S_{23}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (2-15)$$

Por lo tanto, la ley de comportamiento de los materiales transversalmente isótropos queda completamente definida mediante **5 constantes**.

### 2.1.4 Materiales isótropos

Por último, existe la posibilidad de que las propiedades del material se mantengan constantes en todas las direcciones. En tal caso hablamos de un material isótropo y los tensores se reducen a:

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{11} & S_{12} & 0 & 0 & 0 \\ S_{12} & S_{12} & S_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(S_{11} - S_{12}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} \quad (2-17)$$

Por lo tanto, la ley de comportamiento de los materiales isotrópicos queda completamente definida mediante **2 constantes**.

## 2.2 Constantes ingenieriles

Como se ha visto en la sección anterior, el número de constantes que caracterizan la ley de comportamiento de un material depende de las simetrías elásticas que estén presentes. Para dar un sentido físico a estos valores, se definen las constantes ingenieriles, que a grandes rasgos se resumen en tres tipos:

- **Módulo de Young  $E_1$** : denota, en la dirección  $i$ , la tensión por unidad de deformación normales que experimenta el material al someterse a una tracción o compresión pura en dicha dirección:

$$\sigma_i = E \varepsilon_i \quad (2-18)$$

- **Coefficiente de Poisson  $\nu_{ij}$** : representa el cociente entre las deformadas normales en las direcciones  $j$  e  $i$ , cuando se aplica una tensión en la dirección  $i$ . Se considera positivo cuando se produce una contracción en la dirección transversal, luego:

$$\nu_{ij} = -\frac{\varepsilon_j}{\varepsilon_i} \quad (2-19)$$

- **Módulo de cizalladura  $G_{ij}$** : denota, en el plano  $i$ - $j$ , la tensión por unidad de deformación tangenciales que experimenta el material al someterse a una tensión tangencial pura en dicho plano.
- **Módulo de rigidez volumétrica  $K$** : representa en los materiales isotrópicos la presión hidrostática necesaria para conseguir una deformada volumétrica unitaria:

$$p = -K \frac{\Delta V}{V} \quad (2-20)$$

Las constantes ingenieriles se relacionan con la ley de comportamiento de forma más directa a través del tensor de flexibilidad. No obstante, también pueden obtenerse a partir de las componentes del tensor de rigidez teniendo en cuenta la relación inversa entre ambos tensores (2-7).

Tabla 2–1. Resumen de las constantes ingenieriles en función del tipo de material.

Tipo	Ortótropo	Transversalmente isótropo	Isótropo
Constantes ingenieriles independientes	$E_1, E_2, E_3, \nu_{23}, \nu_{13}, \nu_{12}, G_{23}, G_{13}, G_{12}$	$E_1, E_2, \nu_{12}, G_{23}, G_{12}$	$K, G$
Constantes ingenieriles dependientes	$\nu_{32} = \nu_{23} \frac{E_3}{E_2}$ $\nu_{31} = \nu_{13} \frac{E_3}{E_1}$ $\nu_{21} = \nu_{12} \frac{E_2}{E_1}$	$E_3 = E_2$ $\nu_{13} = \nu_{12}$ $G_{13} = G_{12}$ $\nu_{23} = \frac{E_2}{2G_{23}} - 1$	$E = \frac{9GK}{3K + G}$ $\nu = \frac{E - 2G}{2G}$ $E_1 = E_2 = E_3 = E$ $\nu_{23} = \nu_{13} = \nu_{12} = \nu$ $G_{23} = G_{13} = G_{12} = G$
Tensor de flexibilidad	$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{32}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_{21}}{E_2} & -\frac{\nu_{31}}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{13}}{E_1} & -\frac{\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & -\frac{\nu}{E} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu}{E} & -\frac{\nu}{E} & \frac{1}{E} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G} \end{bmatrix}$
Obtención a partir de tensor de rigidez <sup>2</sup>	$C_{11} = \frac{1 - \nu_{23}\nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta}$ $C_{22} = \frac{1 - \nu_{13}\nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta}$ $C_{33} = \frac{1 - \nu_{12}\nu_{21}}{E_1 E_2 \Delta}$ $C_{23} = \frac{\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}}{E_1 E_2 \Delta}$ $C_{13} = \frac{\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}}{E_1 E_2 \Delta}$ $C_{12} = \frac{\nu_{12} + \nu_{32}\nu_{13}}{E_1 E_3 \Delta}$ $C_{44} = G_{23}$ $C_{55} = G_{13}$ $C_{66} = G_{12}$	$E_1 = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{22} + C_{23}}$ $E_2 = \frac{[C_{11}(C_{22} + C_{23}) - 2C_{12}^2]}{C_{11}C_{22} - C_{12}^2} *$ $*(C_{22} - C_{23})$ $\nu_{12} = \frac{C_{12}}{C_{22} + C_{23}}$ $G_{23} = C_{44} = \frac{C_{22} - C_{23}}{2}$ $G_{12} = C_{66}$	$E = C_{11} - \frac{2C_{12}^2}{C_{11} + C_{12}}$ $G = C_{44}$

<sup>2</sup> Para el caso ortótropo no es posible encontrar una expresión analítica sencilla de las constantes ingenieriles en función de las componentes del tensor de rigidez, luego convendría hallar  $\mathbf{S} = [\mathbf{C}]^{-1}$  numéricamente. No obstante, se muestran los valores de las componentes del tensor en función de las constantes, con  $\Delta = (1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{31}\nu_{13} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13})/(E_1 E_2 E_3)$ .

## 2.3 Modelos micromecánicos

Una vez definidas las constantes ingenieriles que caracterizan cada tipo de material estamos en disposición de presentar los *modelos micromecánicos* que nos permiten obtener cada una de ellas para el caso de materiales compuestos. De forma general, las propiedades del compuesto final dependerán, no solo de las propiedades de la matriz y de la fibra, sino también de su configuración geométrica (disposición, morfología y relación de aspecto de las fibras), del volumen de fibra, del tipo de carga a la que se somete y de posibles imperfecciones como huecos o interfase no ideal.

La obtención de los modelos micromecánicos se basan en una serie de hipótesis:

- Trabajamos con las ecuaciones de la Teoría de la Elasticidad Lineal.
- Tanto matriz como fibra se consideran homogéneas, esto es, sus propiedades permanecen constantes en cada uno de sus puntos.
- La matriz se considera isótropa, mientras que la fibra se puede considerar tanto isótropa como transversalmente isótropa. En este trabajo tomaremos fibra isótropa a modo de simplificación, aunque existen modelos que admiten cualquiera de los casos.
- La unión entre fibra y matriz es ideal, no teniendo en cuenta deslizamientos ni imperfecciones.
- El compuesto debe *ser estadísticamente homogéneo* para que las propiedades obtenidas se mantengan invariables a lo largo de todo el material.

La idea bajo la formulación de un modelo micromecánico consiste en obtener unas propiedades homogéneas del compuesto a partir de una microestructura heterogénea en la que intervienen fases con distintas propiedades y leyes de comportamiento. En adelante, dichas propiedades se conocerán como *propiedades efectivas* del material.

Consideremos un cierto material compuesto sometido a un estado de carga. Si pudiéramos resolver las Ecuaciones de la Elasticidad obtendríamos un estado de tensiones y deformaciones complejo debido a presencia de múltiples fases. Para obtener unas propiedades efectivas sería necesario tomar un valor medio de las tensiones y deformaciones en todo el compuesto y encontrar una relación entre estas de forma similar a las ecuaciones (2-5) y (2-8), aunque esta vez en términos medios:

$$\overline{\sigma_i} = \overline{C_{ij}} \overline{\varepsilon_j} \quad (2-21)$$

$$\overline{\varepsilon_i} = \overline{S_{ij}} \overline{\sigma_j} \quad (2-22)$$

Con el objetivo de simplificar el problema a uno resoluble, debe considerarse un *volumen representativo* (*Representative Volume Element, RVE*) que modele de la mejor forma posible la microestructura interna del compuesto. Los distintos modelos micromecánicos surgen de los distintos RVE propuestos por sus autores y de las herramientas utilizadas para resolver el problema elástico. De esta forma, podemos agrupar los modelos micromecánicos en tres categorías:

- *Modelos basados en la Resistencia de Materiales*: tienen en cuenta únicamente las propiedades y las fracciones de volumen de los materiales constituyentes, ignorando la geometría y disposición interna. Por tanto, el compuesto se considera macroscópicamente homogéneo e isótropo. Son los modelos más simples y generalmente poco precisos para la mayoría de las constantes ingenieriles. No obstante, son útiles para dar un límite superior e inferior a dichas constantes. La *ley de mezclas* y *ley de mezclas inversa* fueron los primeros modelos propuestos en [1] y [2], considerando un estado de isodeformación o isotensión, respectivamente. También se plantearon otras técnicas, como los *principios energéticos*, en los que se utilizan los principios de mínima energía potencial y mínima energía complementaria [3];

y los principios variacionales [4].

- *Modelos basados en soluciones elásticas:* obtienen la solución del problema elástico al que se somete el volumen representativo, considerando la geometría y disposición interna de las fases. Aquí se incluyen los *modelos auto consistentes*, en los que el RVE se embebe en un medio infinito con las propiedades finales del compuesto, desconocidas a priori. Ejemplos son los modelos propuestos por Hill para fibra continua [5] y Kerner para un compuesto constituido por inclusiones que se aproximan esféricas [7]. Los modelos pensados para refuerzos de fibra circular engloban los *modelos de cilindros concéntricos* (en inglés, *Composite Cylinder Assemblage, CCA*) y son útiles tanto para fibra continua como para fibra corta, siendo en este último caso conocidos como *modelos de deslizamiento por cortante (shear lag models)* [8].

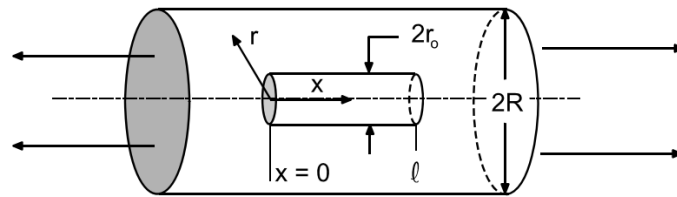


Figura 2-1. Ejemplo de CCA para obtener las propiedades de un compuesto de fibra corta.

- *Modelos semiempíricos:* estos modelos se basan en resultados analíticos y experimentales para formular las correlaciones. Las ecuaciones de Halpin-Tsai [9] tratan de condensar en una única formulación los resultados obtenidos a través de la solución elástica de otros modelos como los recogidos en [6] y [7], así como de resultados experimentales mediante un ajuste de curvas. Para ello hace uso de un parámetro adimensional cuya expresión varía según la geometría del refuerzo y la propiedad que queramos estimar.

Ahora se explicarán con más detalle los modelos que se usarán más adelante para la comparativa con los resultados numéricos. Consideraremos dos tipos de compuestos a la hora de obtener sus propiedades. Por un lado, tomaremos un compuesto de fibra continua en el que la matriz es una *resina epoxy* con  $E_m = 3.5\text{GPa}$ ,  $\nu_m = 0.35$  y la fibra es de vidrio con  $E_f = 73\text{GPa}$ ,  $\nu_f = 0.22$ . Por el otro, emplearemos un compuesto de inclusiones de carburo de tungsteno en matriz de cobalto, con  $E_m = 207\text{GPa}$ ,  $\nu_m = 0.30$  y  $E_f = 703\text{GPa}$  y  $\nu_f = 0.22$ . Con estos valores se calcularán las propiedades que estiman cada uno de los modelos aquí considerados.

### 2.3.1 Ley de mezclas

Los modelos analíticos más simples para la estimación de las propiedades del material compuesto son la *ley de mezclas* y la *ley de mezclas inversa*, también conocidos como *Modelos de Reuss* y *Voigt*, respectivamente. Estos simplifican el problema elástico suponiendo un estado de isodeformación o isotensión, que se ajustará a la realidad en mayor o menor medida en función de la propiedad que se quiera estimar y de la estructura micromecánica del compuesto. En la Figura 2-2 se representa el proceso de simplificación de la estructura para llegar a un modelo del que podamos encontrar una solución analítica.

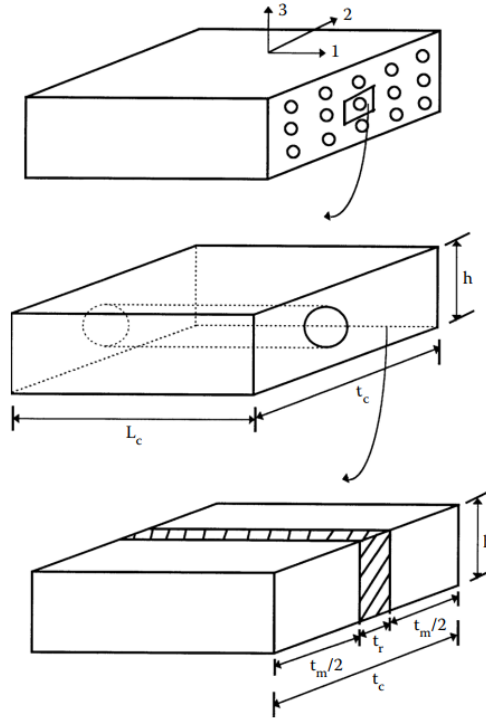


Figura 2-2. Modelo empleado para la obtención de la ley de mezclas. Figura extraída de [16].

Considérese el volumen anterior sometido a un estado de carga en la dirección de la fibra. La fuerza se repartirá entre fibra y matriz de tal forma que se cumpla la siguiente relación:

$$A_c \sigma_c = A_f \sigma_f + A_m \sigma_m \quad (2-23)$$

Donde  $A_{c,f,m}$  y  $\sigma_{c,f,m}$  son los valores del área y de la tensión en el compuesto, fibra y matriz, respectivamente.

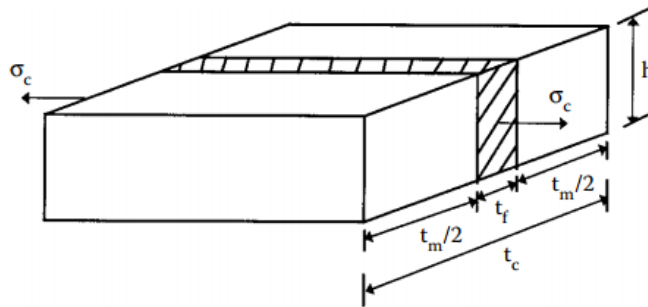


Figura 2-3. Estado de carga para determinar la ley de mezclas mediante un estado de isodeformación. Figura extraída de [16].

Si ahora usamos la relación entre la tensión y la deformación longitudinales a través del módulo de Young y suponemos un *estado de isodeformación* se puede llegar fácilmente a la siguiente ecuación para determinar el módulo elástico longitudinal del compuesto:

$$E_{lc} = v_f E_f + v_m E_m \quad (2-24)$$

Lo que se conoce como *Ley de mezclas directa* o simplemente *Ley de mezclas*.

Un procedimiento similar puede seguirse para determinar el coeficiente de Poisson longitudinal  $\nu_{12}$  del compuesto a partir del de sus constituyentes, suponiendo nuevamente la misma deformación longitudinal en matriz y fibra:

$$\nu_{12c} = \nu_f \nu_f + \nu_m \nu_m \quad (2-25)$$

Considérese ahora el volumen sometido a un estado de carga en dirección transversal a la fibra. Relacionando el incremento de longitud del compuesto con los incrementos en la fibra y matriz por separado se llega a la relación:

$$t_c \epsilon_c = t_f \epsilon_f + t_m \epsilon_m \quad (2-26)$$

Donde  $t_{c,f,m}$  y  $\epsilon_{c,f,m}$  son los valores del espesor y de la deformación en el compuesto, fibra y matriz, respectivamente.

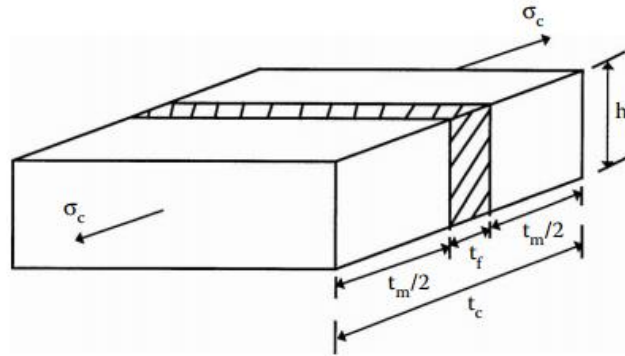


Figura 2-4. Estado de carga para determinar la ley de mezclas inversa mediante un estado de isotensión.  
Figura extraída de [16].

Usando nuevamente la definición del módulo de Young y suponiendo un *estado de isotensión* en el compuesto puede encontrarse la siguiente ecuación para determinar el módulo elástico transversal del compuesto:

$$\frac{1}{E_{2c}} = \nu_f \frac{1}{E_{2f}} + \nu_m \frac{1}{E_m} \quad (2-27)$$

Lo que se conoce como *Ley de mezclas inversa*. Expresiones similares pueden hallarse para los módulos de cizalladura longitudinal y transversal,  $G_{12}$  y  $G_{23}$ :

$$\frac{1}{G_{12c}} = \nu_f \frac{1}{G_{12f}} + \nu_m \frac{1}{G_m} \quad (2-28)$$

$$\frac{1}{G_{23c}} = \nu_f \frac{1}{G_{23f}} + \nu_m \frac{1}{G_m} \quad (2-29)$$

Puede comprobarse que los resultados experimentales para  $E_1$  y  $\sigma_{12}$  en materiales de fibra continua se ajustan con suficiente precisión a las estimaciones dadas por la ley de mezclas (2-24) y (2-25). En cambio, las estimaciones para  $E_2$ ,  $G_{12}$  y  $G_{23}$  no son lo suficientemente precisas, por lo que se han propuesto distintos modelos para predecir estas propiedades.



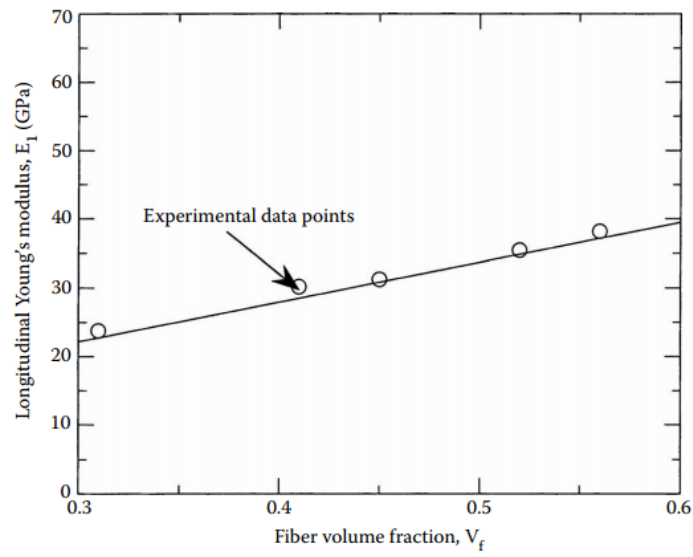


Figura 2-5. Comparación entre los resultados experimentales y la predicción de la ley de mezclas para el módulo de Young longitudinal  $E_1$ . Figura extraída de [16].

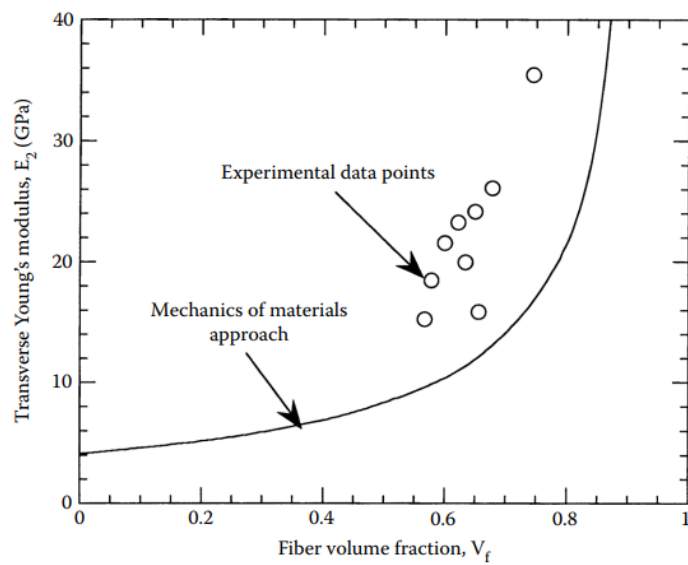


Figura 2-6. Comparación entre los resultados experimentales y la predicción de la ley de mezclas inversa para el módulo de Young transversal  $E_2$ . Figura extraída de [16].

Tabla 2-2. Resultados de la ley de mezclas para un compuesto de fibra con  $E_m = 3.5GPa$ ,  $\nu_m = 0.35$  y  $E_f = 73GPa$ ,  $\nu_f = 0.22$ .

$\nu_f$	$E_1[GPa]$	$\nu_{12}$	$E_2[GPa]$	$G_{12}[GPa]$	$G_{23}[GPa]$
0.10	10.45	0.3370	3.868	1.433	1.433
0.20	17.40	0.3240	4.323	1.603	1.603
0.30	24.35	0.3110	4.899	1.818	1.818
0.40	31.30	0.2980	5.653	2.100	2.100
0.50	38.25	0.2850	6.680	2.485	2.485
0.60	45.20	0.2720	8.163	3.043	3.043
0.70	52.15	0.2525	10.49	3.924	3.924

### 2.3.2 Ley de mezclas modificada: Modelo de Hopkins y Chamis

El *Modelo de Hopkins y Chamis*, también conocido como la *ley de mezclas modificada*, surge por la necesidad de mejorar las predicciones obtenidas por la ley de mezclas inversa en compuestos de fibra continua.

El modelo se basa en el presentado para la ley de mezclas (ver Figura 2-2), aunque realizado en dos etapas. En una primera etapa se considera un volumen representativo compuesto por un bloque de *material ficticio*  $b$  rodeado de otro par de bloques de matriz. El espesor de este material se determina al pasar de una fibra circular a otra cuadrada, manteniendo la misma fracción volumétrica de fibra  $\nu_f$  en el compuesto.

Conocidas las propiedades  $E_{2b}$ ,  $G_{12b}$  y  $G_{23b}$  del material ficticio es posible aplicar la ley de mezclas inversa usando dichas propiedades y  $\nu'_f = \sqrt{\nu_f}$ . Las constantes del material ficticio pueden calcularse a su vez aplicando la ley de mezclas a otro modelo equivalente en el que un bloque de fibra está rodeado por dos bloques de matriz. Un esquema del modelo puede apreciarse en la Figura 2-7.

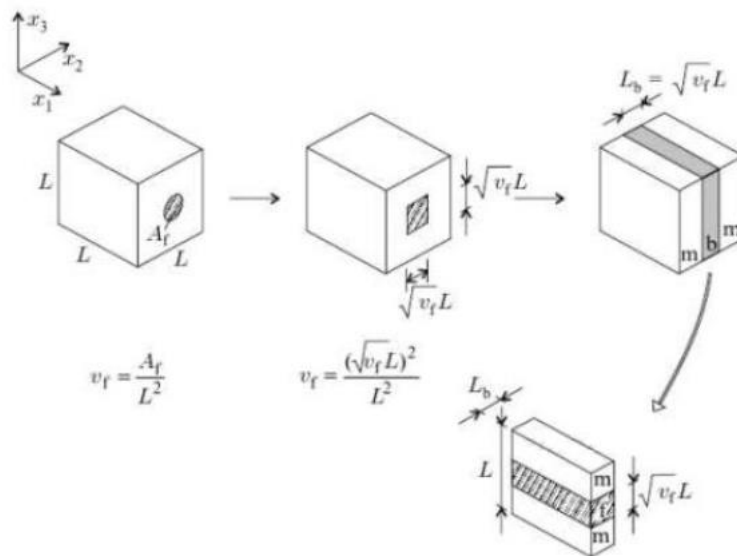


Figura 2-7. Esquema del modelo de Hopkins y Chamis. Figura extraída de [17].

Las ecuaciones de Hopkins y Chamis pueden resumirse en la siguiente formulación:

$$P = \left( \frac{\sqrt{v_f}}{P_b} + \frac{1 - \sqrt{v_f}}{P_m} \right)^{-1} \quad (2-30)$$

$$P_b = \sqrt{v_f} P_f + (1 - \sqrt{v_f}) P_m \quad (2-31)$$

Siendo  $P$  la propiedad  $E_2$ ,  $G_{12}$  o  $G_{23}$  que se desee estimar. En cuanto a  $E_1$  y  $\sigma_{12}$  sigue pudiendo usarse la ley de mezclas.

Tabla 2-3. Resultados de la ley de mezclas modificada para un compuesto de fibra con  $E_m = 3.5 \text{ GPa}$ ,  $v_m = 0.35$  y  $E_f = 73 \text{ GPa}$ ,  $v_f = 0.22$ .

$v_f$	$E_1 [\text{GPa}]$	$v_{12}$	$E_2 [\text{GPa}]$	$G_{12} [\text{GPa}]$	$G_{23} [\text{GPa}]$
0.10	10.45	0.3370	4.791	1.785	1.785
0.20	17.40	0.3240	5.837	2.178	2.178
0.30	24.35	0.3110	7.012	2.620	2.620
0.40	31.30	0.2980	8.446	3.162	3.162
0.50	38.25	0.2850	10.30	3.866	3.866
0.60	45.20	0.2720	12.86	4.840	4.840
0.70	52.15	0.2525	16.65	6.300	6.300

### 2.3.3 Modelo de Hashin y Shtrikman

El modelo de Hashin y Shtrikman [4] se basa en el empleo de *principios variacionales* para establecer límites en las propiedades de materiales macroscópicamente homogéneos e isótropos. Se trata de un método general que no tiene en cuenta la microestructura del compuesto. Por lo tanto, es útil para obtener los valores máximo y mínimo de las propiedades de materiales compuestos por inclusiones de cualquier tipo.

Las ecuaciones de Hashin y Shtrikman establecen los siguientes límites en el módulo de rigidez volumétrica  $K$  y en el módulo de cizalladura  $G$ :

$$K_{\max} = K_f + (1 - v_f) \left[ \frac{1}{K_m - K_f} + \frac{3v_f}{3K_f + 4G_f} \right]^{-1} \quad (2-32)$$

$$K_{\min} = K_m + v_f \left[ \frac{1}{K_f - K_m} + \frac{3(1 - v_f)}{3K_m + 4G_m} \right]^{-1} \quad (2-33)$$

$$G_{\max} = G_f + (1 - \nu_f) \left[ \frac{1}{G_m - G_f} + \frac{6\nu_f (K_f + 2G_f)}{5G_f (3K_f + 4G_f)} \right]^{-1} \quad (2-34)$$

$$G_{\min} = G_m + \nu_f \left[ \frac{1}{G_f - G_m} + \frac{6(1 - \nu_f)(K_m + 2G_m)}{5G_m (3K_m + 4G_m)} \right]^{-1} \quad (2-35)$$

Donde se ha supuesto que  $K_f > K_m$  y  $G_f > G_m$ . Puede observarse que existe una simetría en las ecuaciones para ambas fases. Esto explica que no se haya tenido en cuenta una microestructura concreta para la obtención de las ecuaciones, y que la única distinción que hagamos entre las fases  $f$  y  $m$  sea a través de sus propiedades.

Los límites que marcan las correlaciones de Hashin y Shtrikman son más estrechos que los dados por la ley de mezclas y la ley de mezclas inversas. Además, hay que tener en cuenta que los límites se acercan cuando hay una menor diferencia entre las propiedades de ambas fases.

### 2.3.4 Ecuaciones de Halpin-Tsai

Las *ecuaciones de Halpin-Tsai* tratan de condensar los resultados obtenidos mediante modelos auto consistentes, modelos numéricos y resultados experimentales en una única formulación de la forma:

$$\frac{P}{P_m} = \frac{1 + \zeta \eta \nu_f}{1 - \eta \nu_f} \quad (2-36)$$

$$\eta = \frac{\frac{P_f}{P_m} - 1}{\frac{P_f}{P_m} + \zeta} \quad (2-37)$$

Donde  $P$  representa la propiedad que se desea calcular y  $\xi$  es un *parámetro adimensional de refuerzo*, cuyo valor viene dado en función del modelo considerado. El parámetro  $\xi$  puede tomar como límites los valores 0 e infinito, en cuyo caso llegamos a la ley de mezclas inversa y a la ley de mezclas, respectivamente.

En [9] se obtienen las expresiones de  $\xi$  para distintos modelos auto consistentes de *fibra continua*, como el *modelo de Hill* (en base a los resultados de Hermans [6]) y de *inclusiones esféricas*, como el *modelo de Kerner*. En la tabla siguiente se recogen los valores de  $\xi$  de estos modelos, que serán los que se usarán posteriormente para la comparación de resultados. Las ecuaciones de Halpin-Tsai consideran válida la ley de mezclas para la estimación de las propiedades  $E_1$  y  $\nu_{12}$ , en cuyo caso el valor de  $\xi$  sería infinito.

Tabla 2–4. Valores del parámetro adimensional de refuerzo  $\xi$  para distintos modelos micromecánicos. Datos extraídos de [9].

Modelo	Propiedad elástica	$\xi$
Hill (fibra continua)	$k^3$	$\frac{1 - \nu_m - 2\nu_m^2}{1 + \nu_m}$
	$G_{23}$	$\frac{1 + \nu_m}{3 - \nu_m - 4\nu_m^2}$
	$G_{13}$	1
Kerner (inclusiones esféricas)	$K$	$\frac{2(1 - 2\nu_m)}{1 + \nu_m}$
	$G$	$\frac{7 - 5\nu_m}{8 - 10\nu_m}$

Tabla 2–5. Resultados del modelo de Hill para un compuesto de fibra con  $E_m = 3.5\text{GPa}$ ,  $\nu_m = 0.35$  y  $E_f = 73\text{GPa}$ ,  $\nu_f = 0.22$ .

$\nu_f$	$E_1[\text{GPa}]$	$\nu_{12}$	$E_2[\text{GPa}]$	$G_{12}[\text{GPa}]$	$G_{23}[\text{GPa}]$
0.10	10.45	0.3370	4.288	1.558	1.513
0.20	17.40	0.3240	5.081	1.879	1.779
0.30	24.35	0.3110	6.025	2.280	2.113
0.40	31.30	0.2980	7.221	2.798	2.547
0.50	38.25	0.2850	8.809	3.491	3.133
0.60	45.20	0.2720	11.03	4.467	3.965
0.70	52.15	0.2525	14.38	5.943	5.243

<sup>3</sup> El módulo de rigidez volumétrica en deformación plana  $k$  viene definido en [9].

Tabla 2–6. Resultados del modelo de Kerner para un compuesto de inclusiones esféricas con  $E_m = 207GPa$ ,  $\nu_m = 0.30$  y  $E_f = 703GPa$ ,  $\nu_f = 0.22$ .

$\nu_f$	$E[GPa]$	$G[GPa]$
0.10	231.3	89.44
0.20	258.5	100.5
0.30	289.1	113.0
0.40	323.9	127.3
0.50	363.8	143.8
0.60	410.1	163.1

# 3 RVE PARA LA IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA DE UN MODELO MICROMECAÁNICO

Los capítulos nuevos pueden comenzarse de una forma cómoda copiando y pegando esta página (desde el principio hasta el final) en una página en blanco. Hay cuatro “profundidades” de Títulos que representan los capítulos, las secciones, las subsecciones y los apartados. Para asegurarse de que el capítulo comienza en página impar puede introducir un salto de sección impar.

## 3.1 Concepto de volumen representativo

En el ámbito de la micromecánica de los materiales compuestos, un *volumen representativo* (*Representative Volume Element, RVE*) consiste en un extracto o modelo del material capaz de caracterizar su microestructura de forma global. El concepto de volumen representativo aparece por primera vez con el fin de generar modelos micromecánicos que permitan obtener las propiedades del compuesto [3].

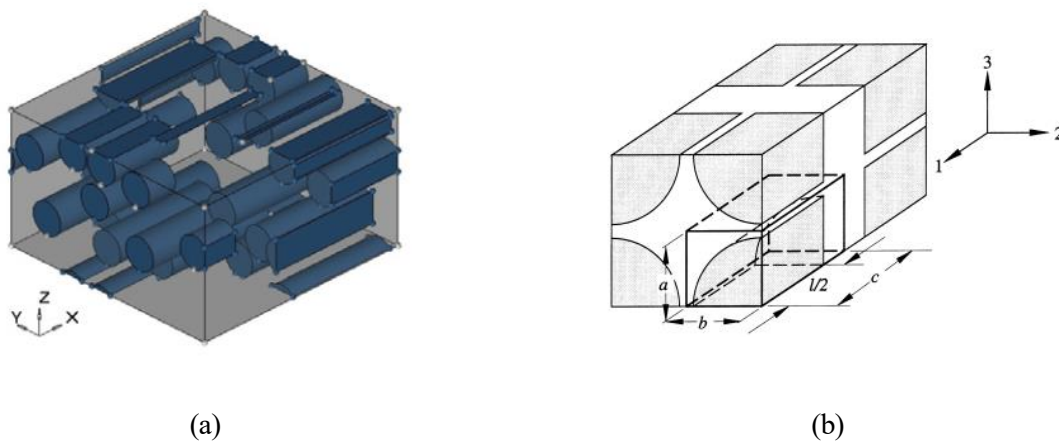


Figura 3-1. Ejemplos de volúmenes representativos para compuestos de fibra corta. (a) Fibras alineadas distribuidas aleatoriamente. (b) Celda unitaria para modelo periódico. Modelos propuestos en [13] y [18].

Tradicionalmente [3], los volúmenes representativos se modelaban de tal forma que presentaban unas características comunes:

- El RVE debe ser representativo, en media, del compuesto, por lo que este debe ser estadística o globalmente homogéneo.
- Debe contener el suficiente número de inclusiones y estas deben ser lo suficientemente pequeñas para que las propiedades obtenidas sean independientes de los valores superficiales de tensión y desplazamiento (*Principio de Saint Venant*). De esta forma conseguimos la independencia con las condiciones de contorno aplicadas.

En nuestro análisis, y con el fin de reducir el coste computacional, supondremos un *compuesto periódico*, lo que nos permitirá caracterizarlo mediante una *celda unitaria* como la mostrada en la Figura 3-1 (b). Este modelo está justificado cuando imponemos unas *condiciones de contorno periódicas* que representan de la forma más fiable posible el estado del volumen representativo embebido en el compuesto.

Para la obtención de resultados se utilizarán en este documento RVE hexaédricos, cuyos ejes y dimensiones características se muestran en la Figura 3-2.

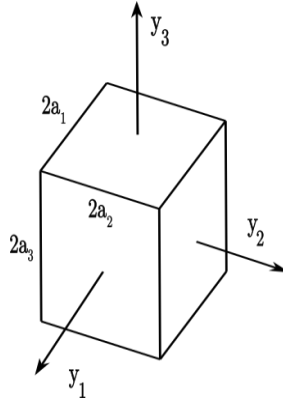


Figura 3-2. Tipología de los RVE que se ensayarán en este documento durante la obtención de resultados. En el caso compuestos de fibra, la dirección de las fibras se corresponde con el eje 1.

Las propiedades del compuesto se estiman mediante *técnicas de homogenización* [19] que nos permiten distinguir entre dos tipos de análisis del material: un *análisis local*, en lo referente a la microestructura y la solución elástica exacta en las fases; y un *análisis global*, relacionado con a la determinación de las propiedades a partir de los valores medios de tensión y deformación.

### 3.2 Análisis local-global

A continuación, se va a desarrollar conceptualmente el procedimiento para la estimación de las propiedades de los materiales compuestos basándonos en un volumen representativo. Estos materiales permiten ser visualizados mediante dos escalas: una *escala microscópica*, en la que distinguimos las fases por las que está constituido el compuesto; y una *escala macroscópica*, en la que el material puede considerarse homogéneo.

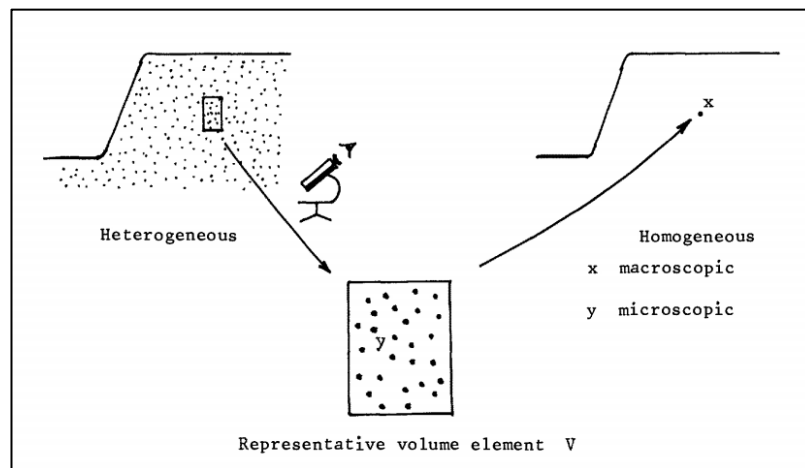


Figura 3-3. Esquema representativo de las distintas escalas en el análisis de un material compuesto. Para un punto  $x$  en la escala macroscópica del material podemos considerar un RVE heterogéneo en la escala



microscópica con distintas propiedades en cada punto  $\mathbf{y}$ . Figura extraída de [19].

La distinción entre ambas escalas nos permite plantear dos problemas completamente independientes. Considérese en la escala macroscópica un punto  $\mathbf{x}$  del compuesto. Mediante un *análisis local* podríamos modelar, para dicho punto, un RVE representativo de la microestructura. A partir de este modelo y mediante las condiciones de contorno adecuadas, podríamos obtener la solución al problema elástico para cada punto  $\mathbf{y}$  en la escala microscópica. De esta forma podríamos establecer una relación entre sus variables medias del tipo (2–21) en la escala macroscópica. Conocidas las propiedades efectivas del compuesto en cada punto podríamos realizar un *análisis global*, que nos permitiría ensayar el compuesto como un cuerpo homogéneo.

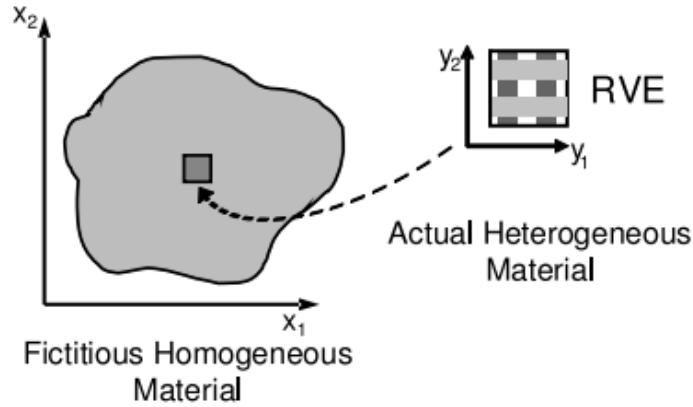


Figura 3-4. Esquema sobre la obtención de las propiedades efectivas del compuesto a partir del RVE mediante un *análisis local*. Figura extraída de [15].

### 3.3 Condiciones de contorno periódicas

Puesto que estamos considerando un compuesto periódico, será necesario especificar las *condiciones de contorno periódicas* que hay que imponer a la celda unitaria.

Considérense las siguientes definiciones de tensión y deformación media en el RVE:

$$\overline{\sigma}_i = \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_{RVE}} \sigma_i dV \quad (3-1)$$

$$\overline{\varepsilon}_i = \frac{1}{V_{RVE}} \int_{V_{RVE}} \varepsilon_i dV \quad (3-2)$$

A partir del concepto de *análisis global-local* y la *teoría de homogenización* podemos desglosar los campos de tensión y deformación en el RVE en dos términos: un valor medio en todo el volumen y una *perturbación periódica* respecto a dicho valor medio.

$$\sigma_i = \overline{\sigma}_i(\mathbf{x}) + \sigma_i^p(\mathbf{y}) \quad (3-3)$$

$$\varepsilon_i = \overline{\varepsilon}_i(\mathbf{x}) + \varepsilon_i^p(\mathbf{y}) \quad (3-4)$$

Debido a la periodicidad del compuesto, los valores medios de las variables elásticas pueden considerarse

constantes a lo largo de todo el material, suposición que será válida para puntos alejados de la frontera. Por su parte, las perturbaciones se asumen periódicas a lo largo de todos los RVE. Estas consideraciones son las que nos permiten imponer unas condiciones de contorno periódicas sobre el volumen representativo.

Llegado a este punto es necesario decidir entre dos métodos para la obtención de las propiedades efectivas del compuesto. Dado que queremos una relación entre las tensiones y deformaciones medias, existe la posibilidad de imponer sobre el RVE una deformación media conocida  $\epsilon_i^0$  y obtener los valores de tensión media resultante mediante (3–1), o bien imponer una tensión media conocida  $\sigma_i^0$  y obtener la deformación media mediante (3–2). Siguiendo el desarrollo que se encuentra en [15], se opta por utilizar el método de *imposición de la deformación media*.

Dada una deformación media es posible obtener las condiciones de contorno periódicas que se deben imponer sobre el RVE [20]:

$$\begin{aligned}\epsilon_i &= \epsilon_i^0 + \epsilon_i^p(\mathbf{y}) \rightarrow \\ u_i &= \epsilon_{ij}^0 y_j + u_i^p(\mathbf{y})\end{aligned}\quad (3-5)$$

Donde  $\mathbf{u}^p$  es el vector perturbación de desplazamientos. La periodicidad y continuidad de los desplazamientos nos permite deducir los siguientes resultados:

$$\begin{cases} u_i^p(a_1, y_2, y_3) = u_i^p(-a_1, y_2, y_3) & \forall y_2 \in [-a_2, a_2] \\ & \forall y_3 \in [-a_3, a_3] \\ u_i^p(y_1, a_2, y_3) = u_i^p(y_1, -a_2, y_3) & \forall y_1 \in [-a_1, a_1] \\ & \forall y_3 \in [-a_3, a_3] \\ u_i^p(y_1, y_2, a_3) = u_i^p(y_1, y_2, -a_3) & \forall y_1 \in [-a_1, a_1] \\ & \forall y_2 \in [-a_2, a_2] \end{cases} \quad (3-6)$$

Combinando las ecuaciones anteriores se obtienen las siguientes relaciones entre los desplazamientos  $\mathbf{u}$  de la celda unidad, en las que intervienen las deformaciones medias impuestas y que sirven como *ecuaciones restrictivas*.

$$\begin{cases} u_i(a_1, y_2, y_3) - u_i(-a_1, y_2, y_3) = 2\epsilon_{i1}^0 a_1 & \forall y_2 \in [-a_2, a_2] \\ & \forall y_3 \in [-a_3, a_3] \\ u_i(y_1, a_2, y_3) - u_i(y_1, -a_2, y_3) = 2\epsilon_{i2}^0 a_2 & \forall y_1 \in [-a_1, a_1] \\ & \forall y_3 \in [-a_3, a_3] \\ u_i(y_1, y_2, a_3) - u_i(y_1, y_2, -a_3) = 2\epsilon_{i3}^0 a_3 & \forall y_1 \in [-a_1, a_1] \\ & \forall y_2 \in [-a_2, a_2] \end{cases} \quad (3-7)$$

Una vez impuestas las restricciones anteriores en el RVE, el problema elástico queda completamente cerrado cuando fijamos uno de sus puntos (como puede ser su centro), impidiendo el desplazamiento como sólido rígido.

### 3.4 Implementación numérica

La resolución de las *ecuaciones de la elasticidad* sometidas a las condiciones de contorno (3–7) se realizará a través del *método de los elementos finitos* (*Finite Element Method, FEM*). Este método consiste en realizar una discretización del volumen, que pasa a estar formado por *elementos* continuos a través de sus *nodos*. Si por otro lado usamos unas *funciones interpoladoras* para aproximar el campo de desplazamientos en el sólido e imponemos el *principio de los trabajos virtuales* obtendremos un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas serán

los *desplazamientos nodales*. Aunque no se desarrollará aquí la formulación matemática del FEM, en [14] puede encontrarse con todo tipo de detalles.

Nuestro objetivo consiste en obtener el *tensor de rigidez efectivo* que aparece en la relación (2–21):

$$\begin{bmatrix} \overline{\sigma}_1 \\ \overline{\sigma}_2 \\ \overline{\sigma}_3 \\ \overline{\sigma}_4 \\ \overline{\sigma}_5 \\ \overline{\sigma}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{C}_{11} & \overline{C}_{12} & \overline{C}_{13} & \overline{C}_{14} & \overline{C}_{15} & \overline{C}_{16} \\ & \overline{C}_{22} & \overline{C}_{23} & \overline{C}_{24} & \overline{C}_{25} & \overline{C}_{26} \\ & & \overline{C}_{33} & \overline{C}_{34} & \overline{C}_{35} & \overline{C}_{36} \\ & & & \overline{C}_{44} & \overline{C}_{45} & \overline{C}_{46} \\ & \text{Sim} & & & \overline{C}_{55} & \overline{C}_{56} \\ & & & & & \overline{C}_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{\varepsilon}_1 \\ \overline{\varepsilon}_2 \\ \overline{\varepsilon}_3 \\ \overline{\varepsilon}_4 \\ \overline{\varepsilon}_5 \\ \overline{\varepsilon}_6 \end{bmatrix} \quad (3-8)$$

Para ello resolveremos 6 problemas independientes, en cada uno de los cuales impondremos una deformación media  $\overline{\varepsilon}_i$ . Esto se consigue a través de las condiciones de contorno, como se ha comentado previamente. Una vez resuelto cada uno de estos problemas obtendremos las tensiones medias  $\overline{\sigma}_i$  en el volumen representativo. Si imponemos *deformaciones unitarias* estaremos calculando directamente cada una de las columnas del tensor  $\overline{C}_{ij}$ .

El cálculo de las tensiones medias se hará a partir del valor obtenido en cada uno de los elementos del mallado. De esta forma, la integral (3–1) se computará a través del siguiente sumatorio:

$$\overline{\sigma}_i = \frac{1}{V_{RVE}} \sum_{e=1}^{N_e} V_e \sigma_i^e \quad (3-9)$$

Lo propio se puede hacer para calcular la deformación media a partir de (3–2), sirviendo como método para la validación de los resultados:

$$\overline{\varepsilon}_i = \frac{1}{V_{RVE}} \sum_{e=1}^{N_e} V_e \varepsilon_i^e \quad (3-10)$$

Una vez obtenido el tensor de esfuerzos a través del método de los elementos finitos  $\overline{\mathbf{C}}_{FEM}$  puede verificarse que se ajusta a los tensores teóricos  $\overline{\mathbf{C}}_{TEO}$  que se encuentran en la Tabla 2–1 para comprobar a qué ley de comportamiento corresponde el modelo micromecánico. Usando los resultados aquí recogidos también podremos obtener las propiedades efectivas del material a partir de las componentes del tensor de rigidez.



## 4 EJEMPLOS DE APLICACIONES

---

En este capítulo se presentarán los modelos propuestos para la aplicación del MEF y se obtendrán como resultados las propiedades del material. El software elegido para la resolución ha sido ANSYS Mechanical en su versión APDL. De esta forma, se han elaborado unos programas capaces de realizar automáticamente el modelo y el mallado a través de ciertos parámetros como la fracción volumétrica de refuerzo  $v_f$  o el tamaño de los elementos. Estas rutinas han sido fundamentales para agilizar el proceso de resolución y han permitido obtener los tensores de rigidez en función de estos parámetros de una forma rápida y eficiente. Para procesar los resultados se ha utilizado MATLAB, con lo cual ha sido necesario establecer una vía de comunicación entre estos programas a través de un fichero de texto. Una vez la rutina de ANSYS ha almacenado los resultados en dicho fichero de texto, otra rutina de MATLAB es capaz de leer y procesar dichos valores, obteniendo las constantes ingenieriles. MATLAB también nos permite implementar las ecuaciones de los modelos micromecánicos que se usarán para la comparativa, así como elaborar las gráficas que se encuentran más adelante. En los anexos se detallan las rutinas utilizadas.

Para visualizar los resultados se representarán gráficamente los valores de cada una de las componentes del vector de tensiones  $\sigma_i$  en los elementos del volumen representativo, así como los de la componente de  $\epsilon_i$  cuya deformación media se haya tomado unidad. Esto nos permitirá observar cómo se relacionan los estados de tensión y deformación en la matriz y el refuerzo en cada caso de carga.

### 4.1 Implementación de un modelo de fibra continua

La primera de las aplicaciones consistirá en la caracterización de un *modelo de fibra continua*, basado en la propuesta dada por [15]. Se considerará una geometría circular y distribución hexagonal de la fibra, que constituye la de máxima compacidad en 2D (máximo en torno al 90% del volumen de fibra). En esta distribución existe una relación entre las dimensiones contenidas en el plano perpendicular a la fibra:

$$a_3 = \sqrt{3}a_2 \quad (4-1)$$

Por otro lado, la dimensión en la dirección de la fibra puede tomar en principio cualquier valor al tratarse de un modelo de fibra continua. Un valor mayor de este parámetro dará lugar a un mayor número de elementos, lo que mejora la exactitud de los cálculos numéricos, a costa de un mayor coste computacional.

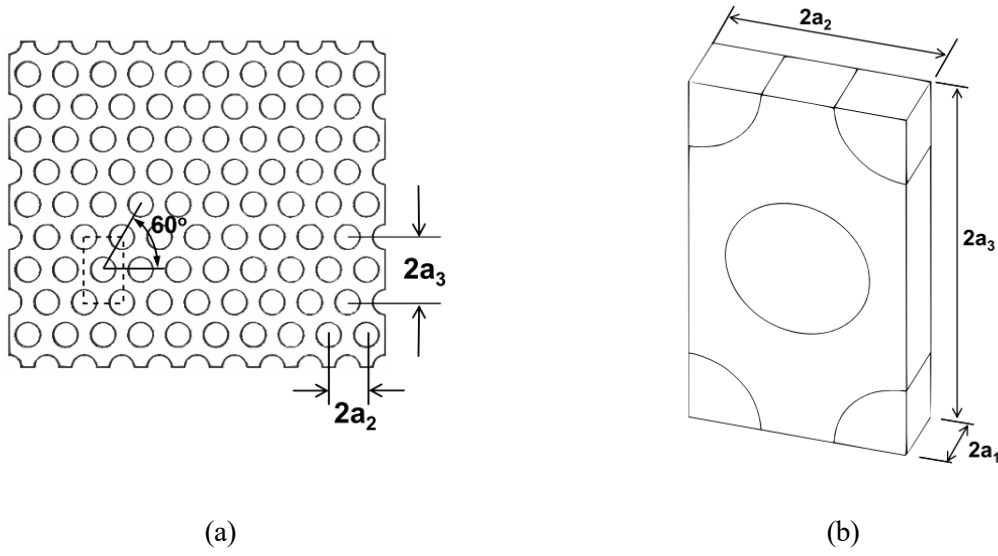


Figura 4-1. Tipología del RVE propuesto para el modelo de fibra continua. De la figura (a) puede deducirse la relación entre las dimensiones  $a_2$  y  $a_3$ . Figuras extraídas de [15].

La disposición hexagonal del RVE le otorga además una ley de comportamiento *transversalmente isótropa*, por lo que las propiedades del modelo quedan definidas mediante 5 constantes (2–14):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{23} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (C_{22} - C_{23})/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

#### 4.1.1 Modelo y mallado

A continuación, se muestra el modelo elaborado en ANSYS para fibra continua y circular con disposición hexagonal. Los modelos se han elaborado de forma paramétrica determinando el diámetro de las fibras  $d_f$  a partir de la fracción volumétrica de fibra  $v_f$  considerada mediante la ecuación:

$$d_f = \sqrt{\frac{8v_f a_2 a_3}{\pi}} \quad (4-2)$$

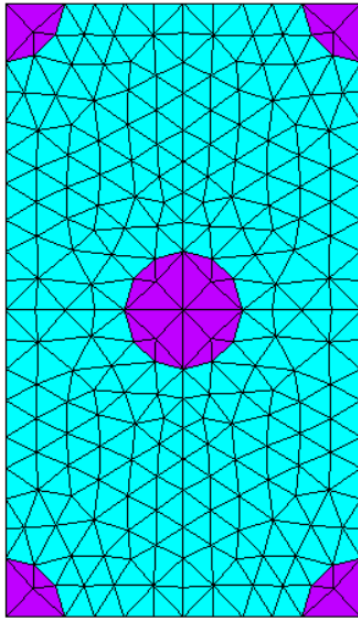
Se han propuesto distintos tipos de mallado para hacer un *análisis de sensibilidad*. Por un lado, se analizará la influencia del tamaño mediante un mallado *grueso*, *medio* y *fino*. Por el otro, se hará un refinado en las caras de contacto entre fibra y matriz, donde se espera un mayor gradiente en la solución de elementos finitos.

Debido a la tipología del modelo se ha hecho un *mallado mediante barrido*. De esta forma, se puede realizar un mallado bidimensional en la cara frontal para luego extender el mallado en el volumen representativo a lo largo de la dirección de las fibras.

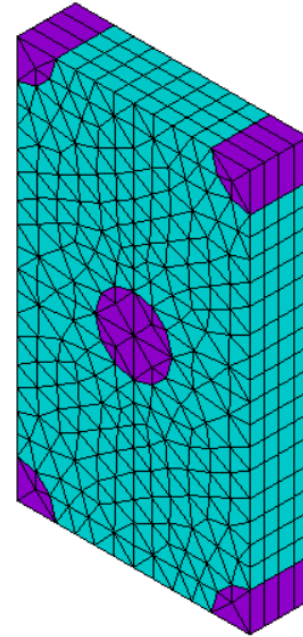
Con el objetivo de realizar el mallado efectivamente para fracciones de volumen elevadas se realizará el mallado en la cara frontal mediante *elementos triangulares*, ya que estos permiten una mejor transición entre elementos de distinto tamaño. Por lo tanto, tras el barrido quedarán elementos prismáticos, como puede apreciarse en la vista isométrica de los mallados. El tipo de elemento elegido para la discretización es el SOLID185, de carácter

lineal.

A continuación, se muestran los mallados de diferentes tamaños para un valor pequeño de la fracción volumétrica de fibra.

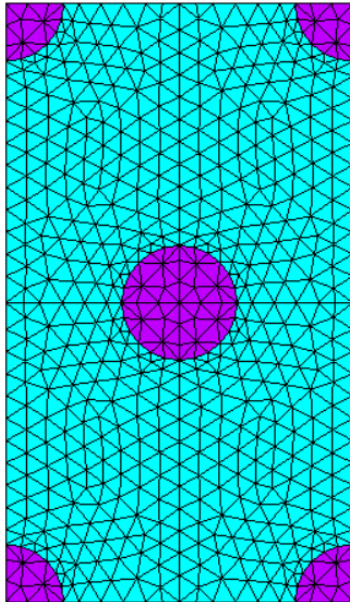


(a)

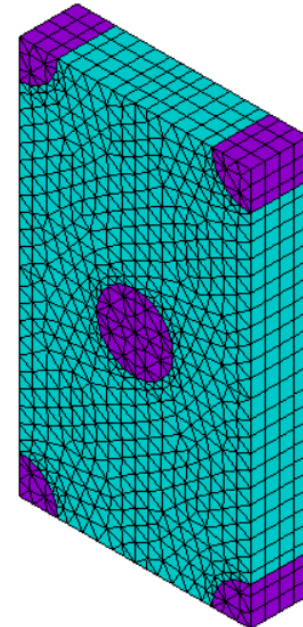


(b)

Figura 4-2. Mallado grueso del modelo para una fracción volumétrica de fibra pequeña  $v_f = 0.10$ .

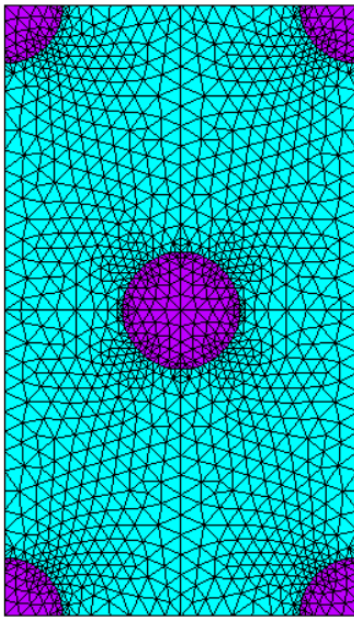


(a)

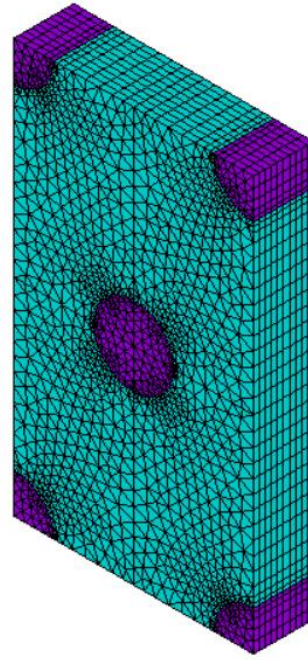


(b)

Figura 4-3. Mallado medio del modelo para una fracción volumétrica de fibra pequeña  $v_f = 0.10$ .



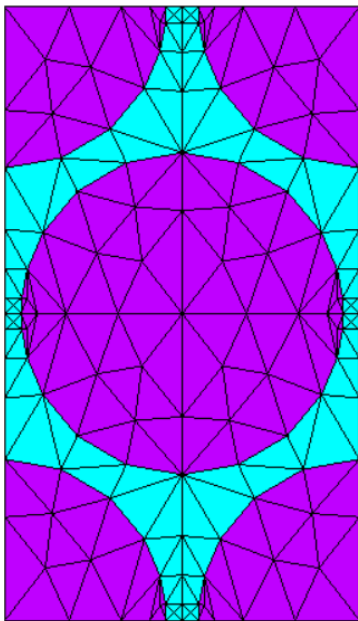
(a)



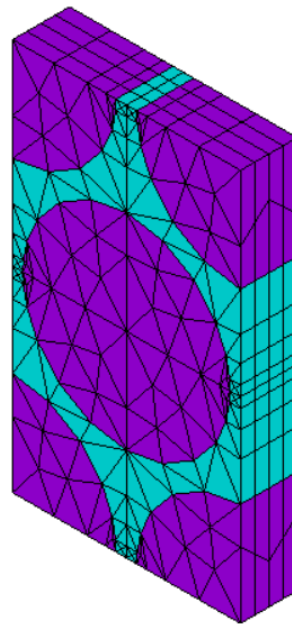
(b)

Figura 4-4. Mallado fino del modelo para una fracción volumétrica de fibra pequeña  $v_f = 0.10$ .

También se muestran los mallados para el valor máximo de  $v_f$  que se considerará en este análisis. Puede apreciarse que el mallado grueso debe ser refinado en aquellas zonas de proximidad entre fibras.



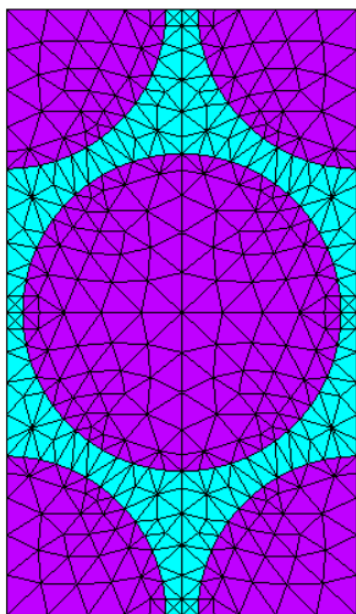
(a)



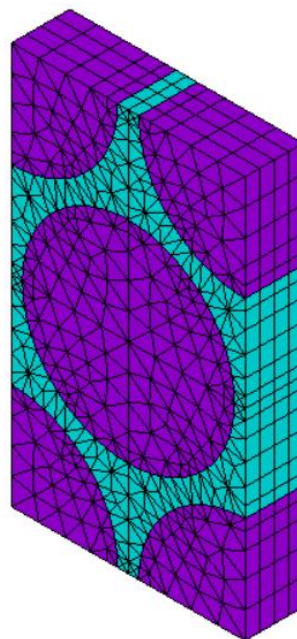
(b)

Figura 4-5. Mallado grueso del modelo para una fracción volumétrica de fibra elevada  $v_f = 0.75$ .



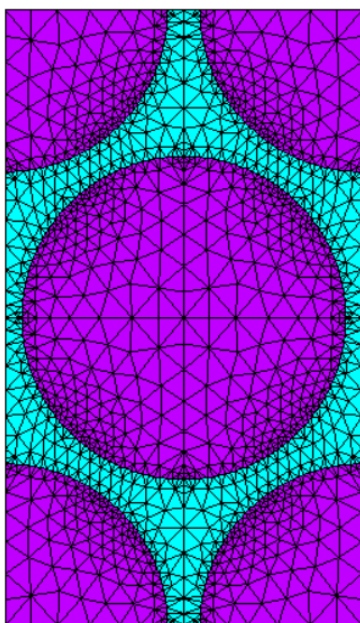


(a)

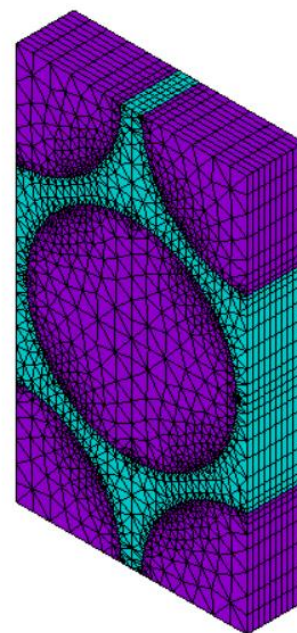


(b)

Figura 4-6. Mallado medio del modelo para una fracción volumétrica de fibra elevada  $v_f = 0.75$ .



(a)



(b)

Figura 4-7. Mallado fino del modelo para una fracción volumétrica de fibra elevada  $v_f = 0.75$ .

#### 4.1.2 Obtención de la matriz de rigidez

Para una fracción volumétrica de fibra de  $\nu_f = 0.5$  se resolverán cada uno de los 6 problemas con deformación media unidad  $\bar{\epsilon}_i = 1$ . Se calcularán cada una de las columnas de  $\bar{\mathbf{C}}_{FEM}$  obtenidas por separado para luego comprobar que el tensor se ajusta a la ley de comportamiento transversalmente isótropa, como se deduce de la disposición hexagonal.

##### 4.1.2.1 Primera columna: deformación longitudinal $\bar{\epsilon}_1$

$$\bar{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 40.9086 \\ 4.9409 \\ 4.9390 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} MPa \quad \bar{\epsilon}_i = \begin{bmatrix} 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

Puede observarse en la Figura 4-8 que cada fase está sometida a una tensión constante e igual a su módulo de Young. Esto se debe al estado de deformación longitudinal (Figura 4-14) que es aproximadamente constante en todo el volumen e igual a la unidad. Vemos por tanto que el estado de deformación se aproxima con la suficiente exactitud a un estado de *isodeformación*, lo que es compatible con la ley de mezclas.

Debido al estado de carga las tensiones tangenciales son prácticamente nulas en todos los elementos, aunque podemos ver en la Figura 4-11 valores no nulos de la tensión tangencial  $\sigma_{23}$  en el plano perpendicular a la fibra. Aunque estos valores no son esperables en un material homogéneo, aquí aparecen debido a las diferentes propiedades que presentan matriz y fibra, particularmente debido al diferente módulo de Poisson. No obstante, todas las tensiones tangenciales son nulas en media, como puede apreciarse de los resultados de  $\bar{\sigma}_i$ .

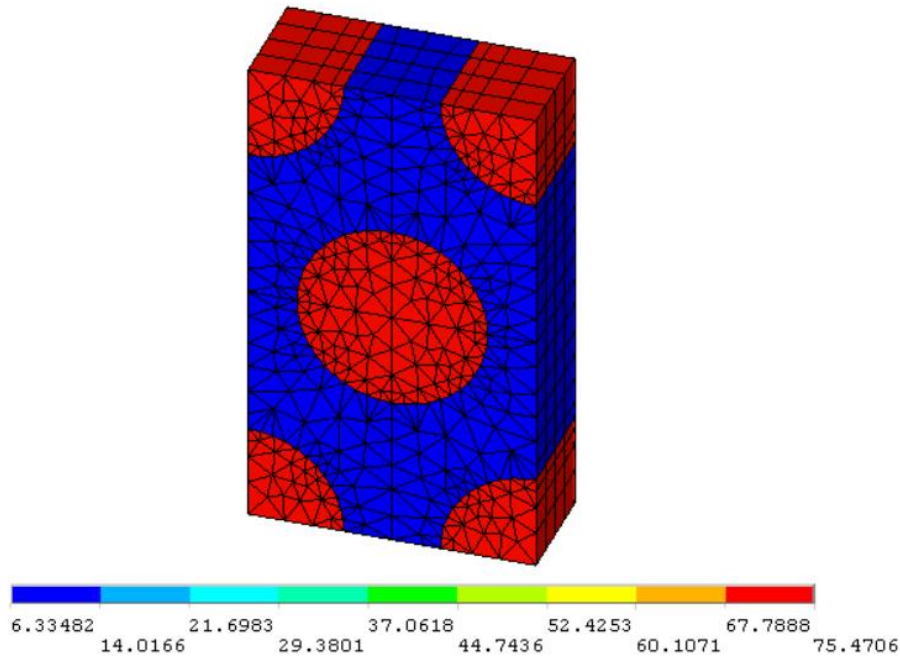


Figura 4-8. Tensión  $\sigma_1$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.

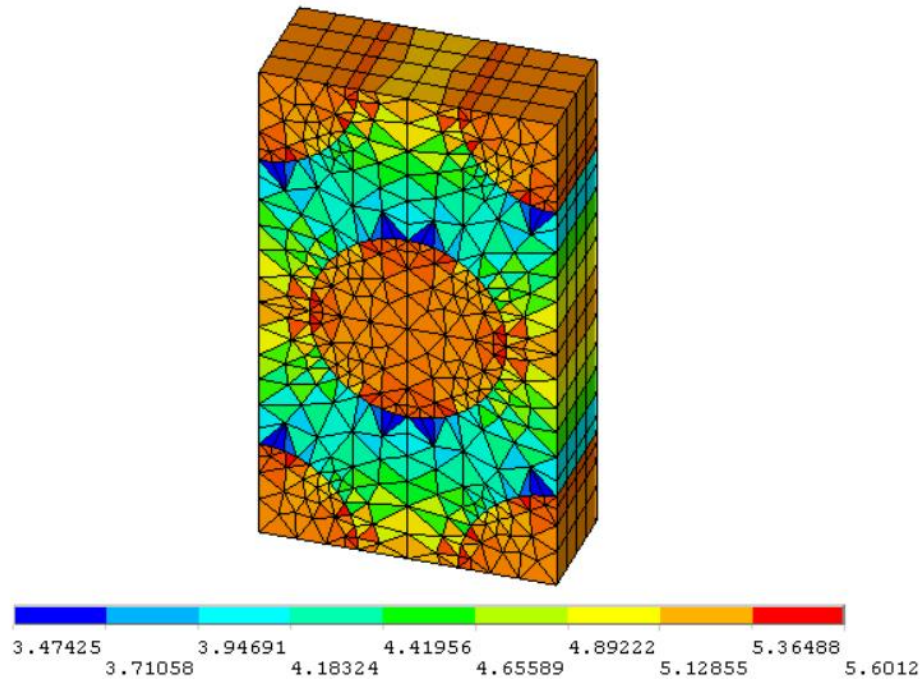


Figura 4-9. Tensión  $\sigma_2$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.

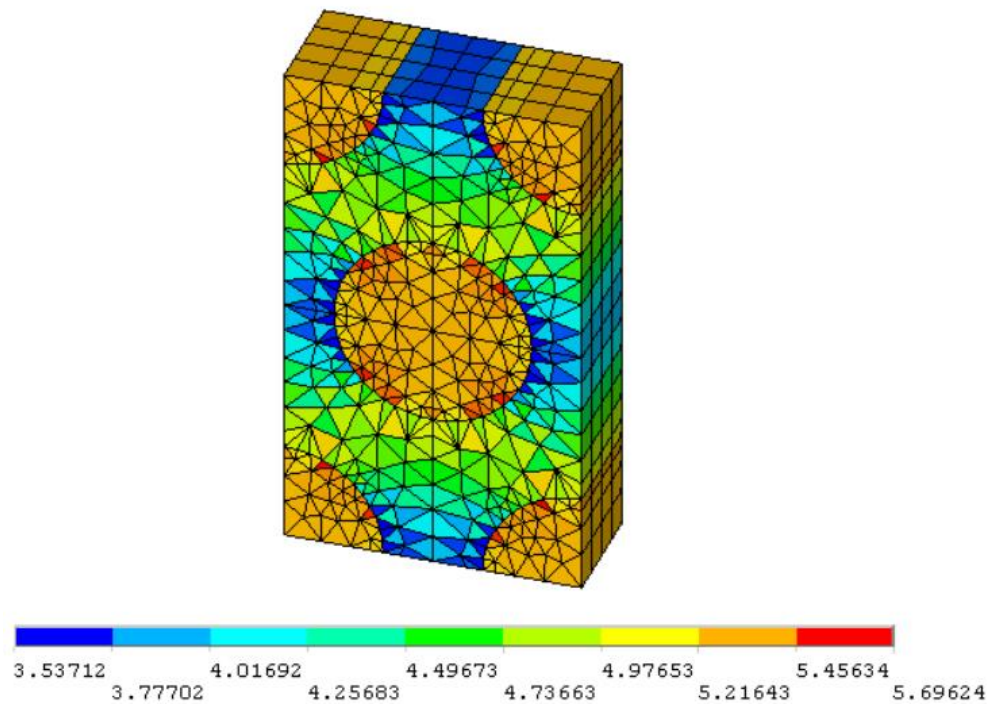


Figura 4-10. Tensión  $\sigma_3$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.

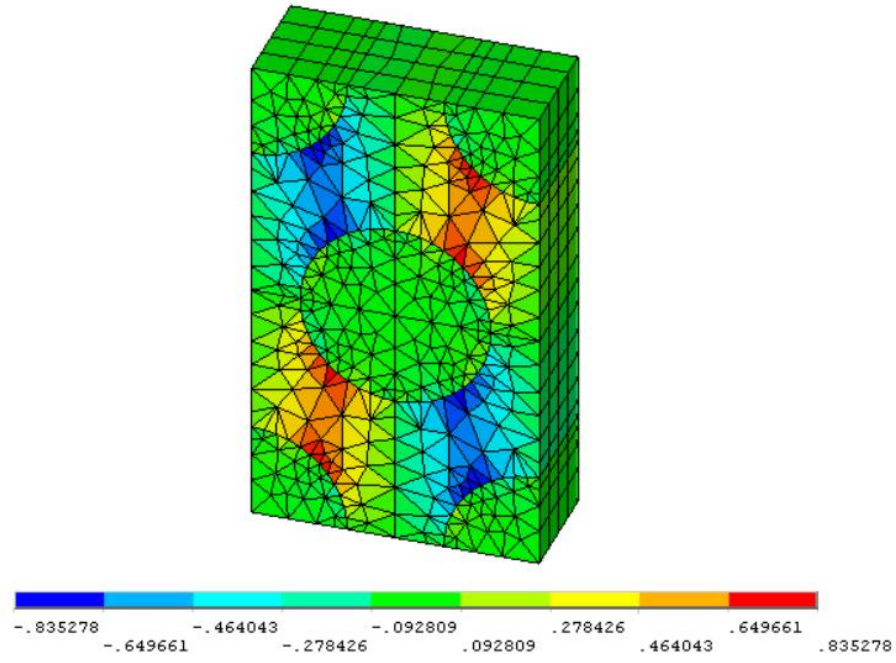


Figura 4-11. Tensión  $\sigma_{23}$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.

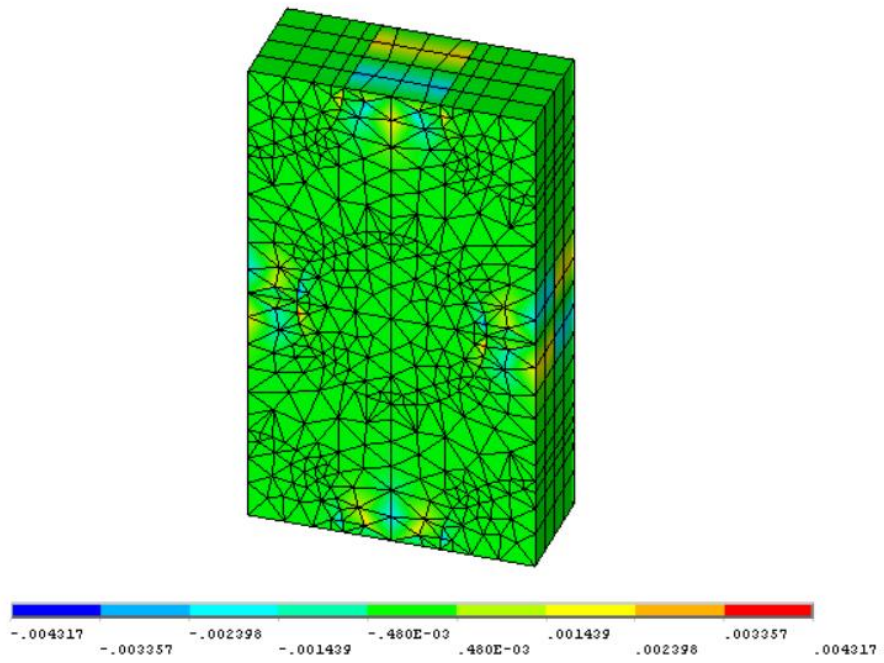


Figura 4-12. Tensión  $\sigma_{13}$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.



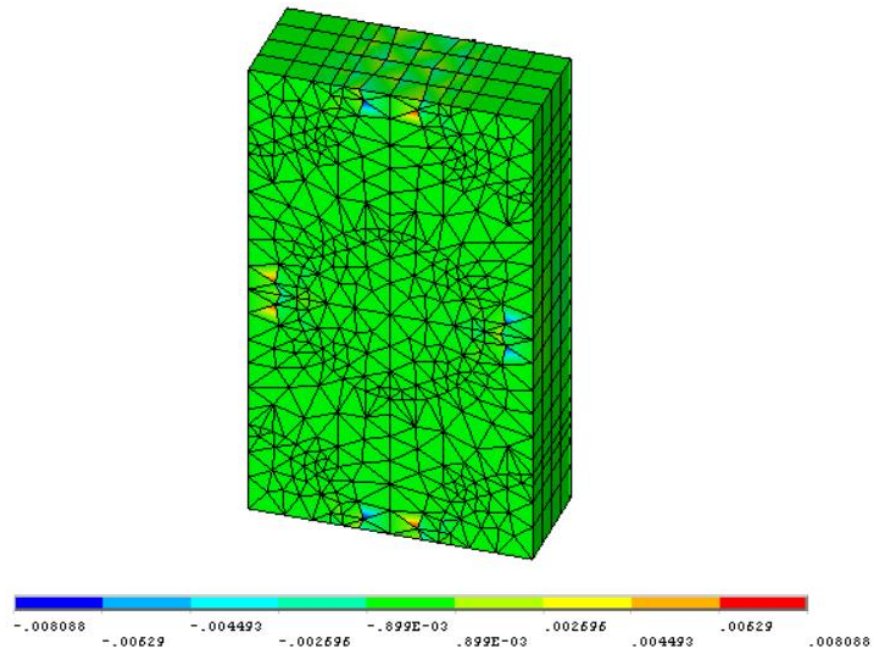


Figura 4-13. Tensión  $\sigma_{12}$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.

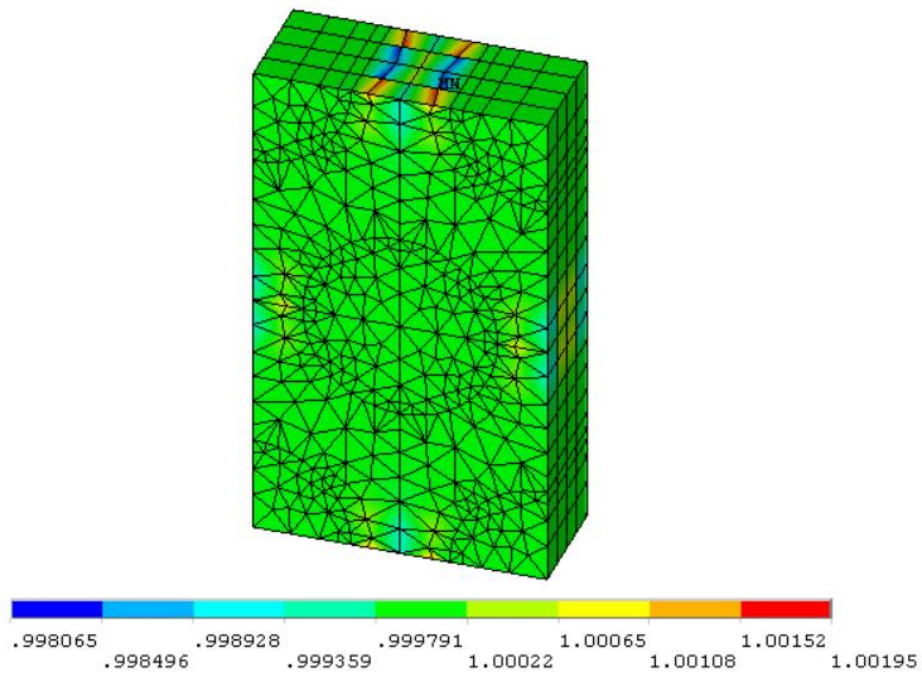


Figura 4-14. Deformación  $\epsilon_1$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ . Modelo de fibra continua.

#### 4.1.2.2 Segunda columna: deformación transversal $\epsilon_2$

$$\bar{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 4.9409 \\ 12.2836 \\ 5.5462 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad \bar{\epsilon}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

A diferencia del estado de carga anterior, de las siguientes figuras (Figura 4-16 y Figura 4-21) no podemos deducir ni un estado de isodeformación ni de isotensión. Por lo tanto, las hipótesis realizadas en la ley de mezclas y la ley de mezclas inversa no son válidas para aproximar las propiedades del material  $E_2$  y  $G_{23}$  con la suficiente exactitud.

Puede verse nuevamente que las tensiones tangenciales son prácticamente nulas, lo que se ajusta al estado de carga considerado. Los valores no nulos de  $\sigma_{23}$  se deben, al igual que en el caso anterior, a diferencias en el coeficiente de Poisson de las fases.

Por su parte, en la Figura 4-21 se aprecia que la deformación que sufre la fibra es sustancialmente menor que la que sufre la matriz. Esto se debe a que la fibra es mucho más rígida que la matriz.

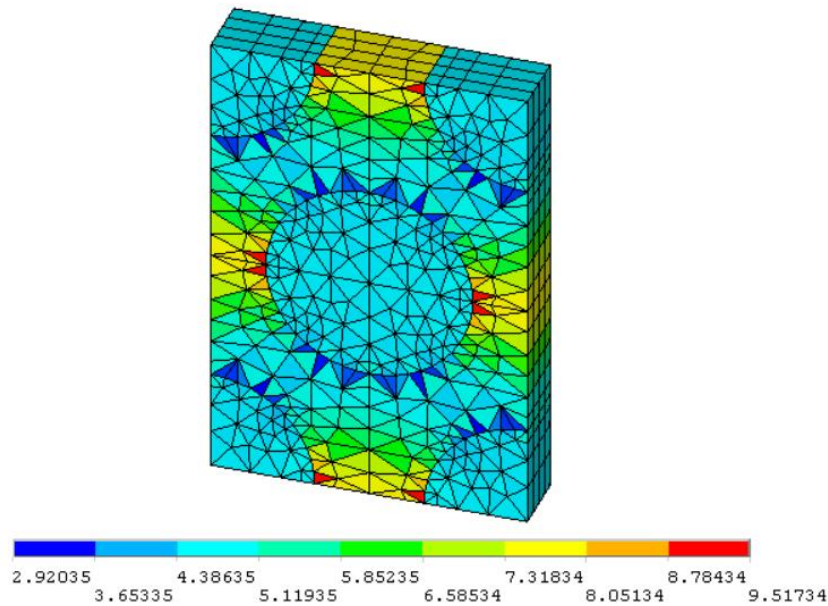


Figura 4-15. Tensión  $\sigma_1$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.

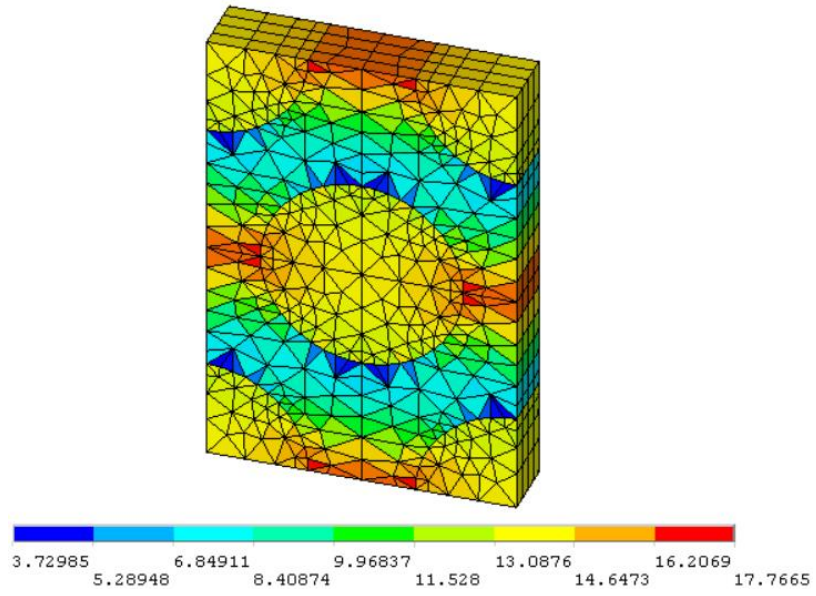


Figura 4-16. Tensión  $\sigma_2$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.

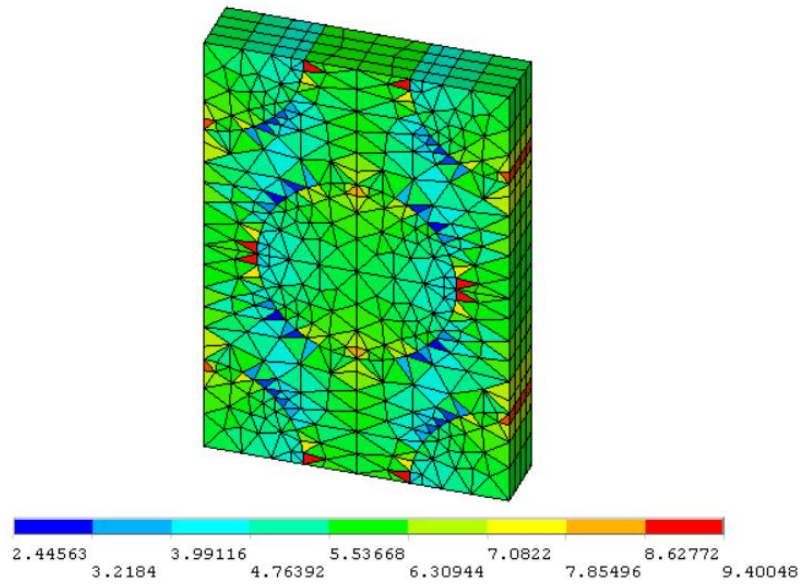


Figura 4-17. Tensión  $\sigma_3$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.

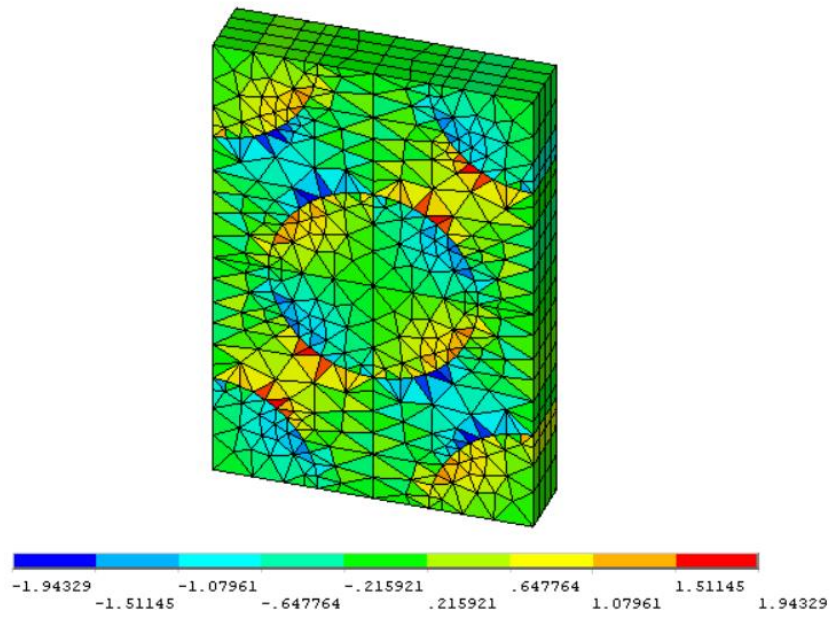


Figura 4-18. Tensión  $\sigma_{23}$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.

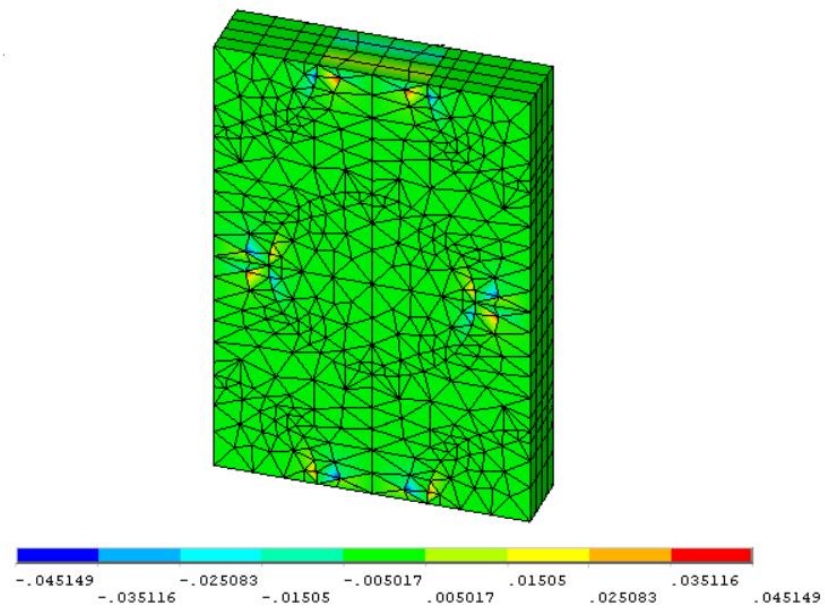


Figura 4-19. Tensión  $\sigma_{13}$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.



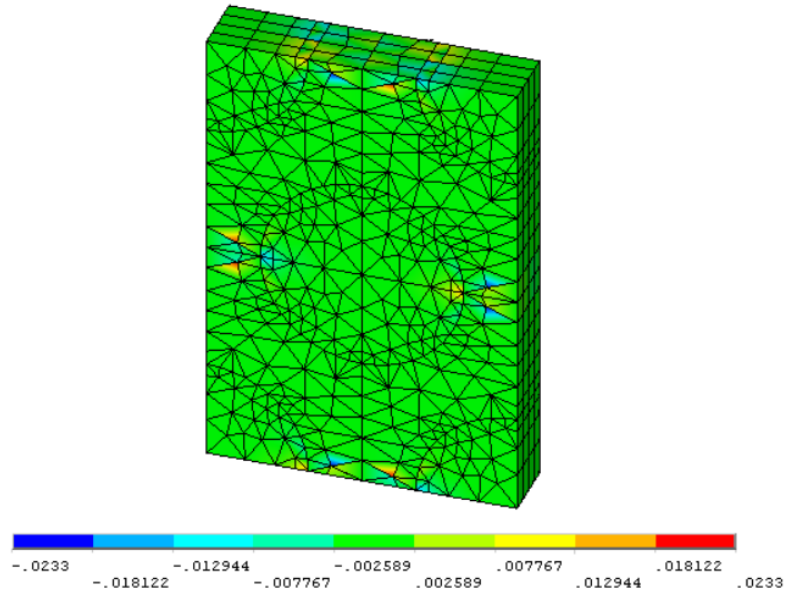


Figura 4-20. Tensión  $\sigma_{12}$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.

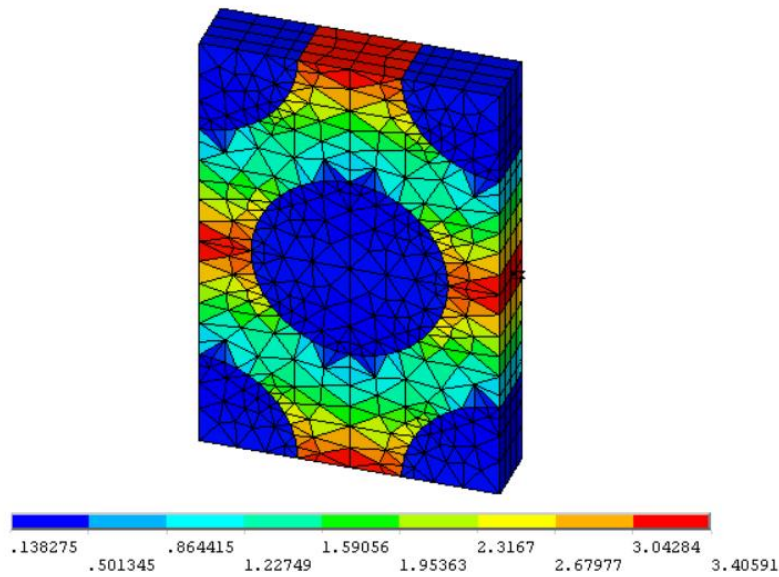


Figura 4-21. Deformación  $\epsilon_2$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_2 = 1$ . Modelo de fibra continua.

#### 4.1.2.3 Tercera columna: deformación transversal $\epsilon_3$

$$\bar{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 4.9390 \\ 5.5462 \\ 12.2746 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad \bar{\epsilon}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

Debido al comportamiento transversalmente isotrópico del modelo, las representaciones gráficas para la solución de la tercera columna serán equivalentes a las obtenidas previamente para la segunda, por lo que se ha prescindido de ellas.

#### 4.1.2.4 Cuarta columna: deformación tangencial $\gamma_{23}$

$$\overline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 3.3714 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad \overline{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 1.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

Los estados tensionales que aparecen en las siguientes figuras recrean con más o menos exactitud los resultados esperados para una deformación tangencial unitaria  $\overline{\gamma}_{23}$ . En este caso, los valores no nulos de la tensión normal (que dan lugar a un cambio de volumen) aparecen debido a los distintos valores del módulo de cizalladura  $G$  que tienen matriz y fibra.

La Figura 4-25 muestra que tampoco es asumible un estado de isotensión tangencial, y podemos hacer un comentario similar al caso anterior sobre la diferencia entre la rigidez de las fases en la Figura 4-28.

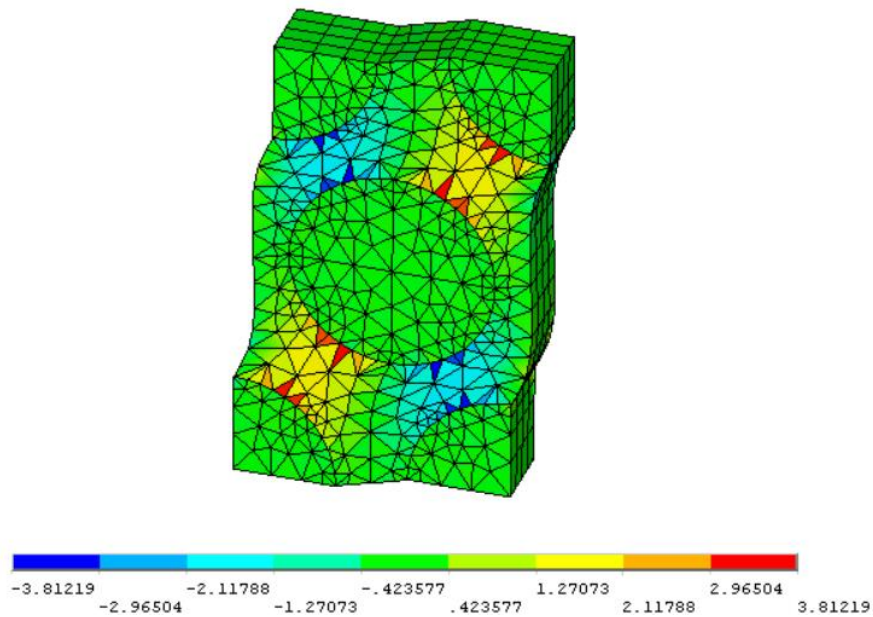


Figura 4-22. Tensión  $\sigma_1$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma}_{23} = 1$ . Modelo de fibra continua.

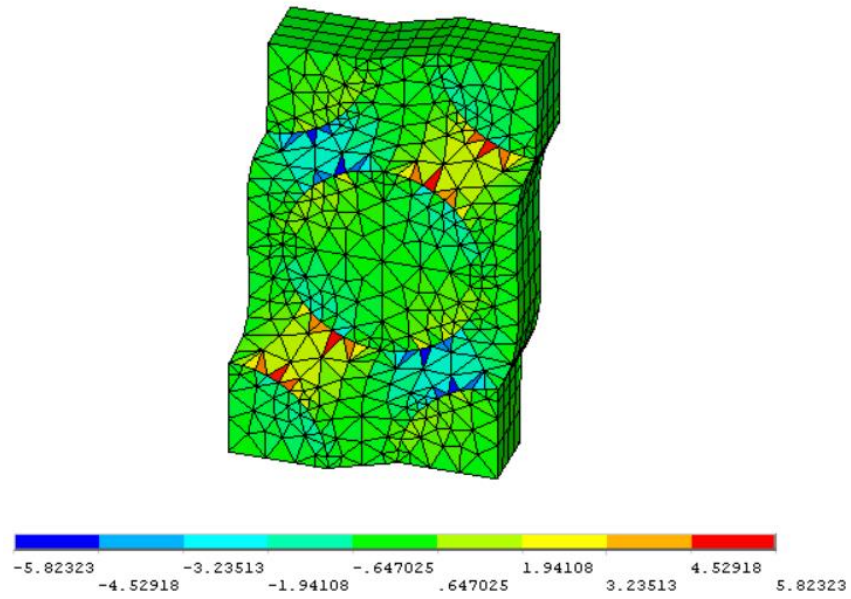


Figura 4-23. Tensión  $\sigma_2$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma}_{23} = 1$ . Modelo de fibra continua.

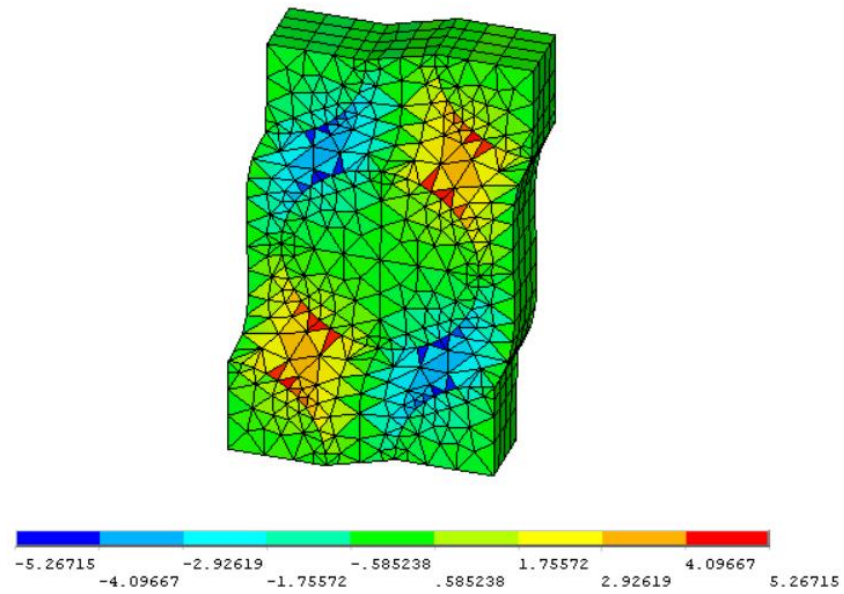


Figura 4-24. Tensión  $\sigma_3$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma}_{23} = 1$ . Modelo de fibra continua.

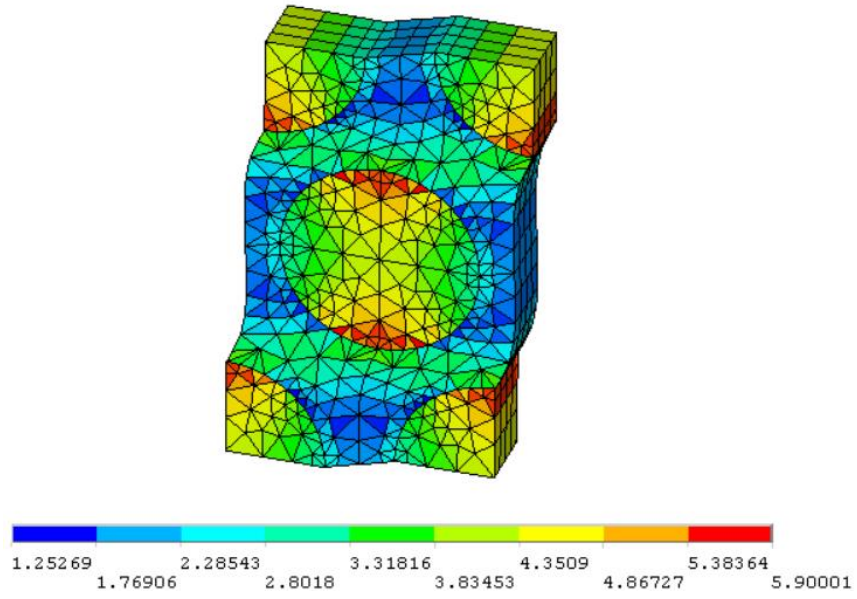


Figura 4-25. Tensión  $\sigma_{23}$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma}_{23} = 1$ . Modelo de fibra continua.

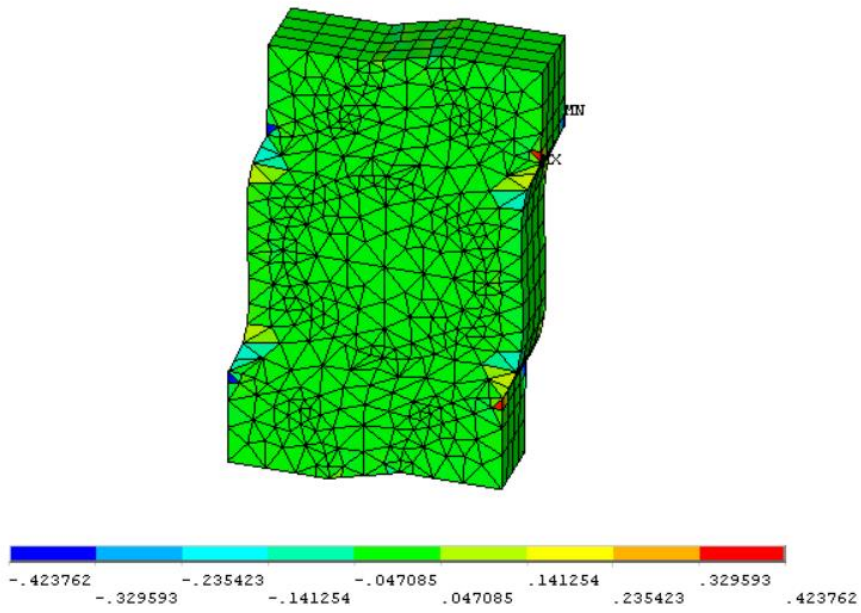


Figura 4-26. Tensión  $\sigma_{13}$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma}_{23} = 1$ . Modelo de fibra continua.

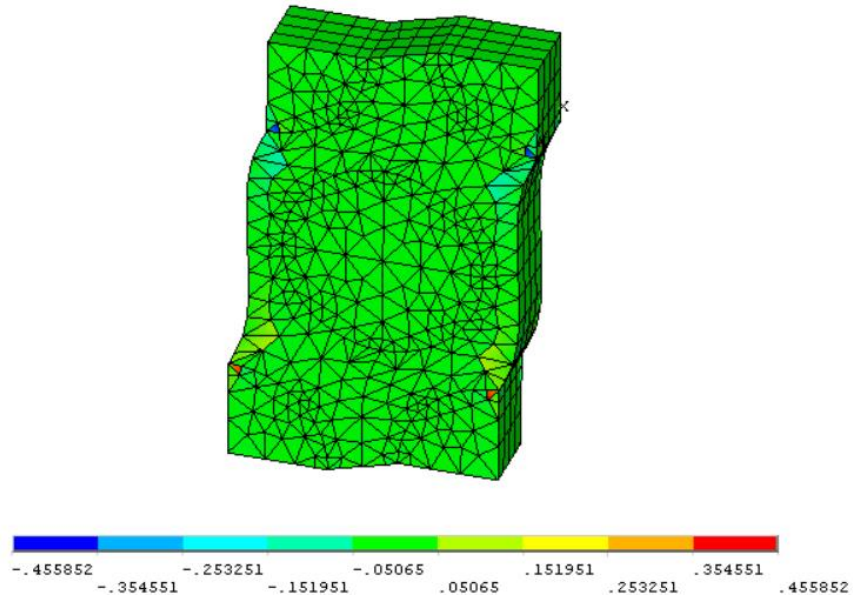


Figura 4-27. Tensión  $\sigma_{12}$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma_{23}} = 1$ . Modelo de fibra continua.

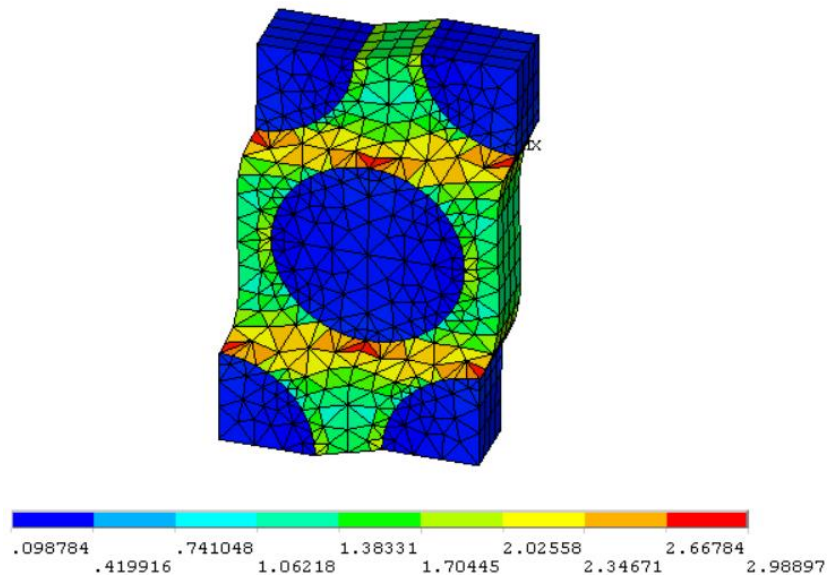


Figura 4-28. Deformación  $\epsilon_{23}$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma_{23}} = 1$ . Modelo de fibra continua.

#### 4.1.2.5 Quinta columna: deformación tangencial $\gamma_{13}$

$$\overline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 3.5123 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad \overline{\epsilon}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 1.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

Debido al comportamiento transversalmente isotrópico del modelo, las representaciones gráficas para la solución de la quinta columna serán equivalentes a las obtenidas a continuación para la sexta.

#### 4.1.2.6 Sexta columna: deformación tangencial $\gamma_{12}$

$$\overline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 3.5220 \end{bmatrix} \quad \overline{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 1.0000 \end{bmatrix}$$

En este último caso podemos hacer los mismos comentarios sobre las tensiones normales y tangenciales en el volumen representativo que para  $\overline{\gamma}_{23} = 1$ . Vuelven a aparecer tensiones normales y tangenciales no esperadas debido a la diferencia entre las propiedades mecánicas de matriz y fibra. Tampoco es asumible un estado de isodeformación o isotensión, como se desprende de las dos últimas figuras.

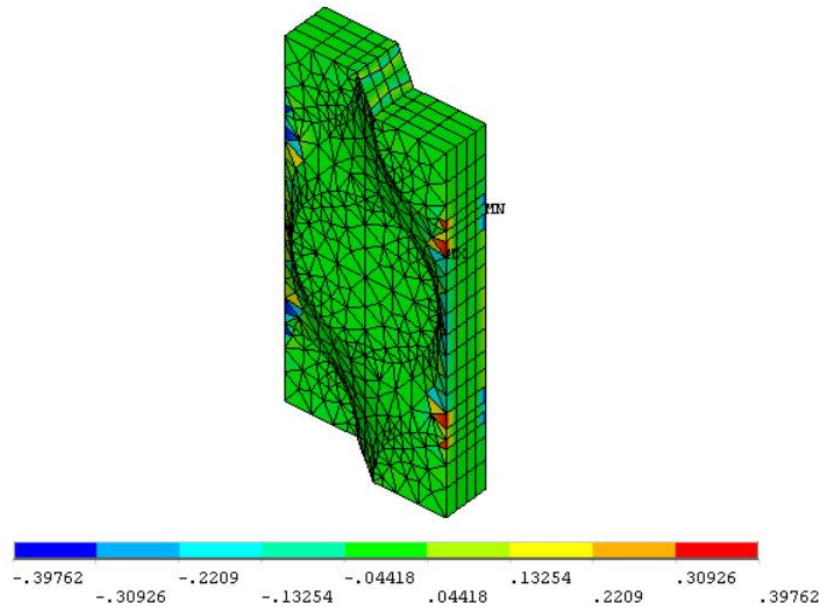


Figura 4-29. Tensión  $\sigma_1$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma}_{12} = 1$ . Modelo de fibra continua.



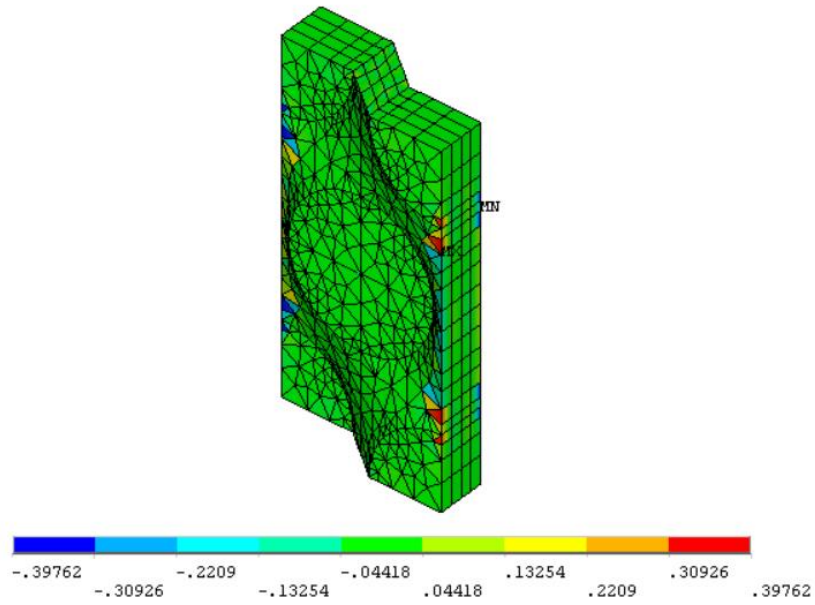


Figura 4-30. Tensión  $\sigma_2$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma}_{12} = 1$ . Modelo de fibra continua.

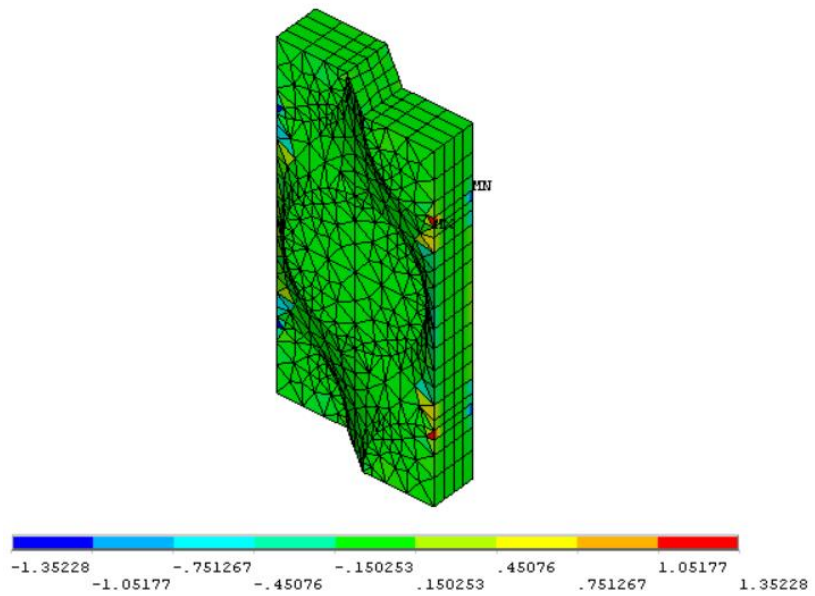


Figura 4-31. Tensión  $\sigma_3$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma}_{12} = 1$ . Modelo de fibra continua.

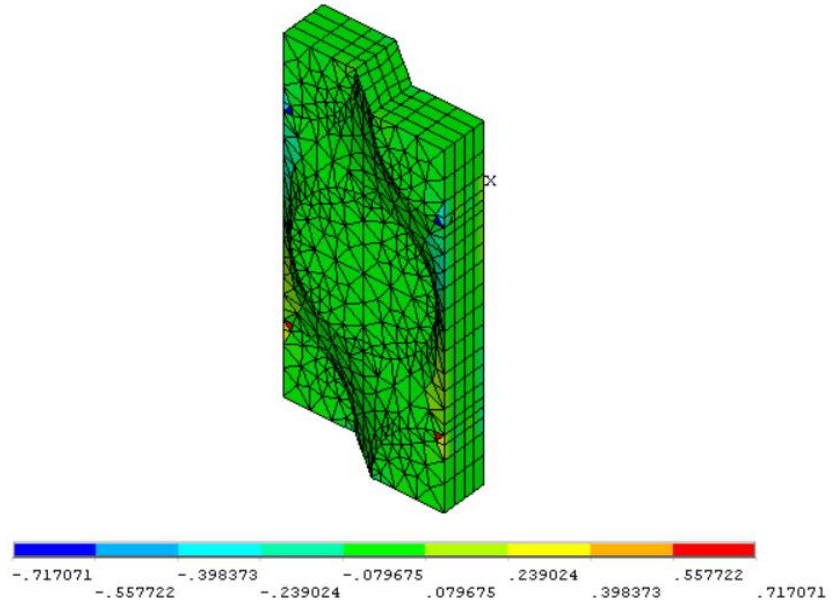


Figura 4-32. Tensión  $\sigma_{23}$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma}_{12} = 1$ . Modelo de fibra continua.

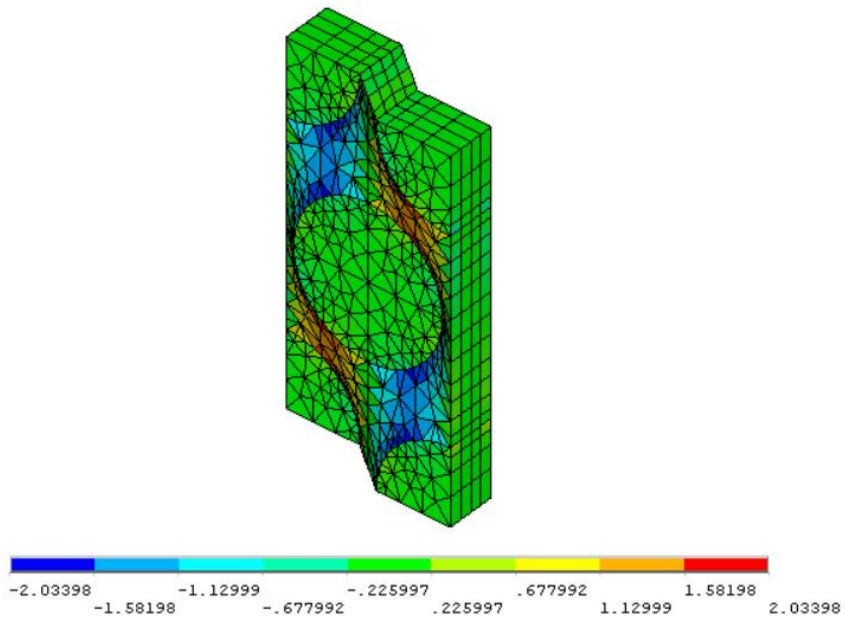


Figura 4-33. Tensión  $\sigma_{13}$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma}_{12} = 1$ . Modelo de fibra continua.



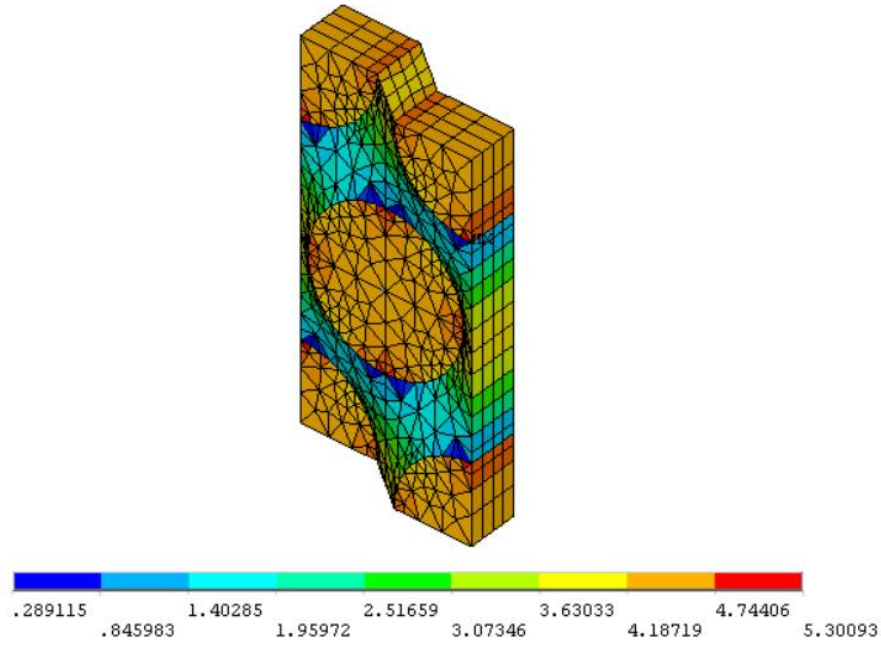


Figura 4-34. Tensión  $\sigma_{12}$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma_{12}} = 1$ . Modelo de fibra continua.

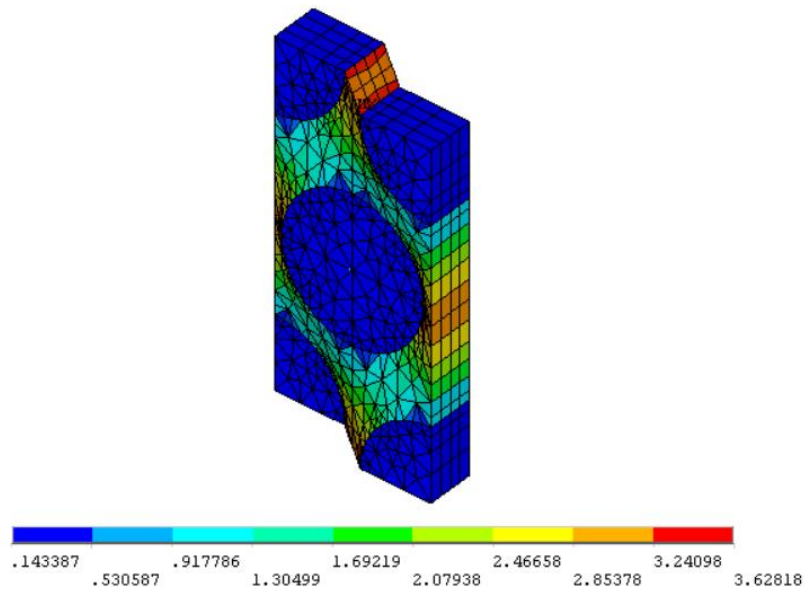


Figura 4-35. Deformación  $\epsilon_{12}$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma_{12}} = 1$ . Modelo de fibra continua.

Para formar el tensor  $\overline{\mathbf{C}}_{TEO}$  se han utilizado las siguientes componentes de  $\overline{\mathbf{C}}_{FEM}$ :  $C_{11}$ ,  $C_{22}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{32}$  y  $C_{55}$ . Puede observarse que el tensor obtenido se ajusta con gran exactitud a una ley de comportamiento transversalmente isótropa.

$$\mathbf{C}_{FEM} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 40.91 & 4.941 & 4.939 & 0 & 0 & 0 \\ 4.941 & 12.284 & 5.546 & 0 & 0 & 0 \\ 4.939 & 5.546 & 12.275 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3.371 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.512 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.522 \end{array} \right]$$

$$\mathbf{C}_{TEO} = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 40.91 & 4.941 & 4.941 & 0 & 0 & 0 \\ 4.941 & 12.284 & 5.546 & 0 & 0 & 0 \\ 4.941 & 5.546 & 12.284 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3.369 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3.512 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3.522 \end{array} \right]$$

#### 4.1.3 Obtención de las constantes del material

En este apartado se representarán gráficamente las propiedades efectivas del material frente a la fracción volumétrica de fibra  $v_f$ . Al tratarse de un modelo transversalmente isótropo el comportamiento elástico del modelo vendrá dado por 5 constantes: el módulo de Young longitudinal  $E_1$ , el coeficiente de Poisson longitudinal  $\nu_{12}$ , el módulo de Young transversal  $E_2$ , el módulo de cizalladura longitudinal  $G_{12}$  y el módulo de cizalladura transversal  $G_{13}$ .

Los resultados se comparan con los modelos micromecánicos de fibra continua expuestos en la sección 2.3. Los modelos elegidos para realizar las comparaciones son la ley de mezclas, la ley de mezclas modificada o modelo de Hopkins-Chamis y la ecuación de Halpin-Tsai basada en la solución de Hermans. Puesto que se han obtenido los resultados para 3 tamaños distintos del mallado también se podrá hacer un análisis de sensibilidad.

#### 4.1.3.1 Módulo de Young longitudinal $E_1$

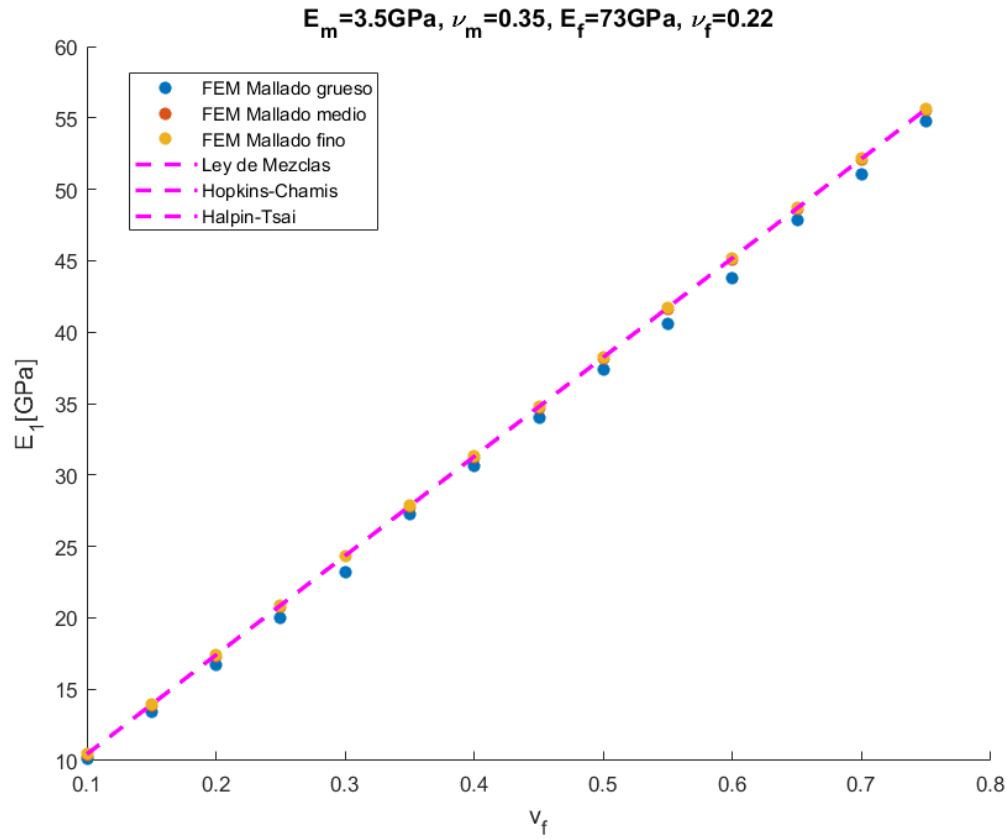


Figura 4-36.  $E_1$  frente a  $v_f$  para los resultados del FEM en fibra continua con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.

Los resultados obtenidos para el módulo de Young longitudinal se ajustan con gran exactitud a los de la ley de mezclas, tal y como había predicho la literatura. Esto es coherente con las soluciones obtenidas para la tensión y la deformación en la dirección de la fibra en el problema de la primera columna, observando que es asumible un estado de isodeformación a través de la Figura 4-14. Vemos además, tal y como se comentó en el Capítulo 2, que las predicciones de los modelos de Hopkins-Chamis y Halpin-Tsai coinciden con los de la ley de mezclas.

Apenas se puede hacer distinción entre los resultados para mallado grueso y fino, aunque este último es algo más preciso.

#### 4.1.3.2 Coeficiente de Poisson longitudinal $\nu_{12}$

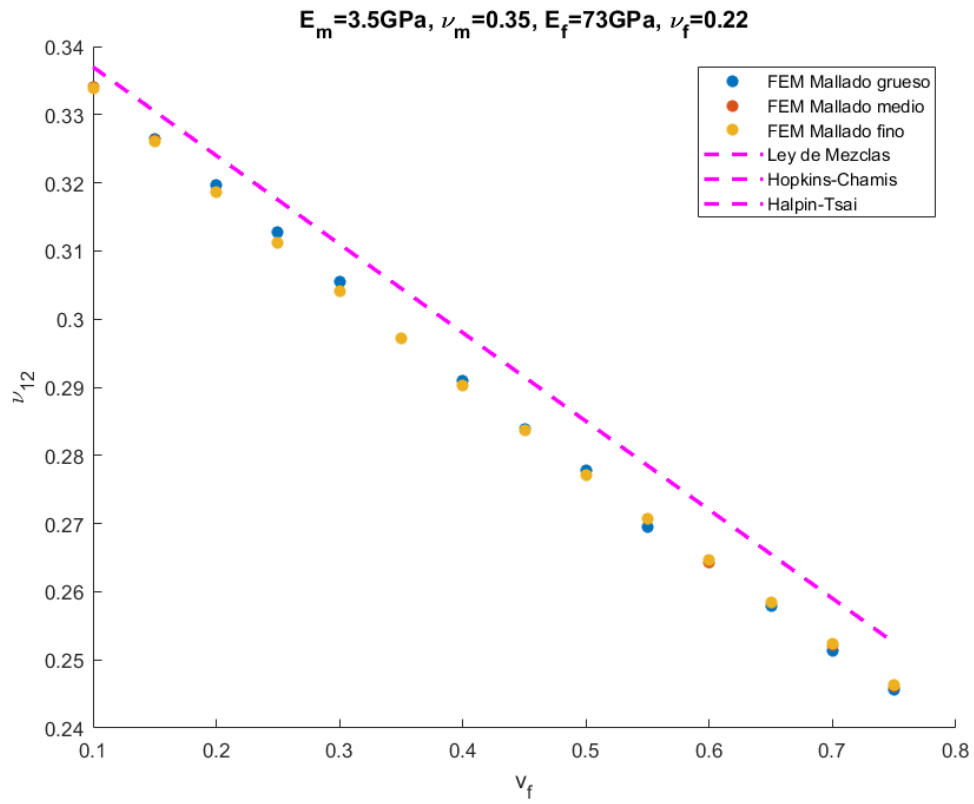


Figura 4-37.  $\nu_{12}$  frente a  $\nu_f$  para los resultados del FEM en fibra continua con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.

En este caso vemos que el módulo de Poisson  $\nu_{12}$  sigue la tendencia lineal que predice la ley de mezclas, aunque hay una diferencia más notable en torno al 10%. Nuevamente, los resultados de Hopkins-Chamis y Halpin-Tsai coinciden con los de la ley de mezclas.

#### 4.1.3.3 Módulo de Young transversal $E_2$

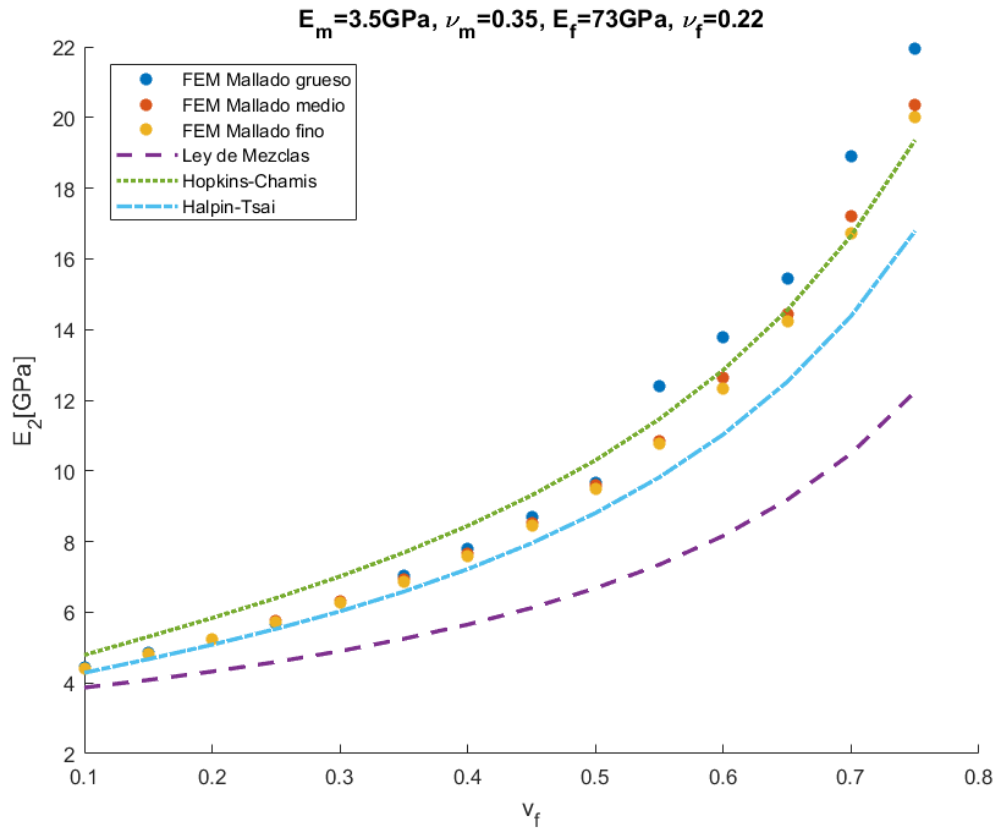


Figura 4-38.  $E_2$  frente a  $v_f$  para los resultados del FEM en fibra continua con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.

Como se comentó previamente, los resultados del problema de la segunda columna no permitían considerar como válido un estado de isotensión. Esto se traduce en la discrepancia entre los resultados obtenidos y la ley de mezclas inversa, especialmente para fracciones volumétricas elevadas. En cambio, se observa una gran correspondencia con las ecuaciones de Halpin-Tsai basadas en la *solución de Hermans* para  $v_f$  pequeños. Para  $v_f$  mayores vemos que los resultados se acercan al modelo de Hopkins-Chamis.

Vemos que el tamaño del mallado apenas influye en la solución salvo para fracciones volumétricas elevadas en las que el mallado grueso se vuelve demasiado inexacto.

#### 4.1.3.4 Módulo de cizalladura longitudinal $G_{12}$

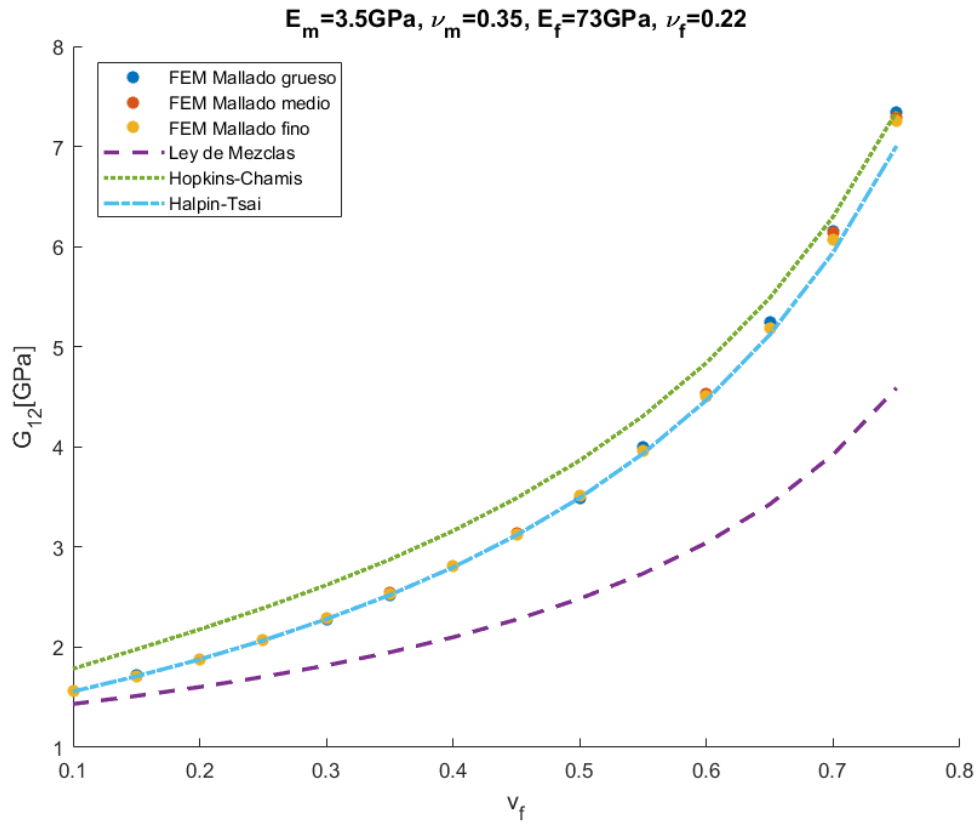


Figura 4-39.  $G_{12}$  frente a  $v_f$  para los resultados del FEM en fibra continua con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.

Se pueden hacer comentarios similares a los hechos para la comparativa de  $E_2$ . Se observa que, aunque la ley de mezclas inversa no predice correctamente los resultados, estos se ajustan a las ecuaciones de Halpin-Tsai con gran exactitud. Respecto al refinamiento del mallado, las diferencias son mínimas.

#### 4.1.3.5 Módulo de cizalladura transversal $G_{23}$

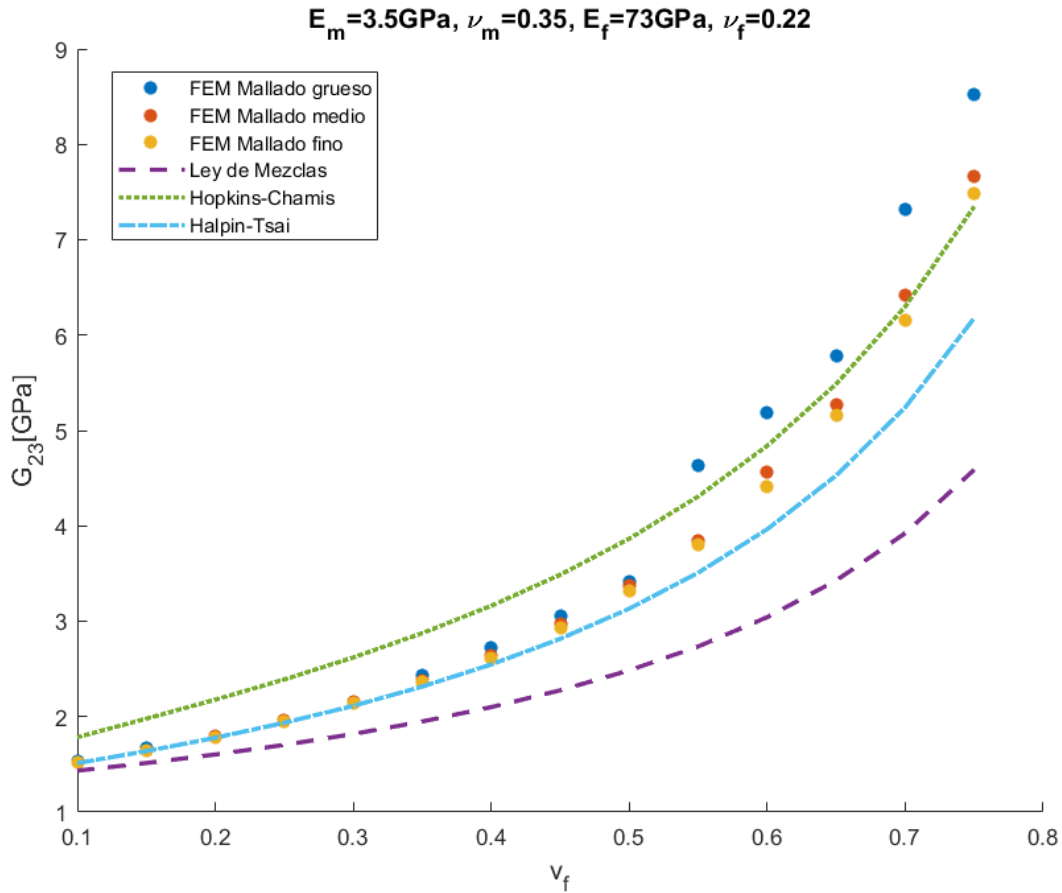


Figura 4-40.  $G_{23}$  frente a  $v_f$  para los resultados del FEM en fibra continua con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.

La comparativa en este caso es similar a la vista para  $E_2$ : para valores pequeños de  $v_f$  los resultados se ajustan al modelo de Halpin-Tsai, y para valores mayores se ajustan a Hopkins-Chamis.

## 4.2 Implementación de un modelo de inclusiones esféricas

La segunda de las aplicaciones consistirá en un *modelo de inclusiones esféricas*. Siguiendo el criterio de elegir distribuciones de máxima compacidad se ha elegido una disposición *cúbica centrada en las caras* (*Face Centered Cubic, FCC*) que constituye la distribución de máxima compacidad en 3D (máximo en torno al 75% del volumen de las inclusiones). El volumen representativo consistirá por tanto en un cubo en el que las inclusiones se disponen tal y como se observa en la Figura 4-41.

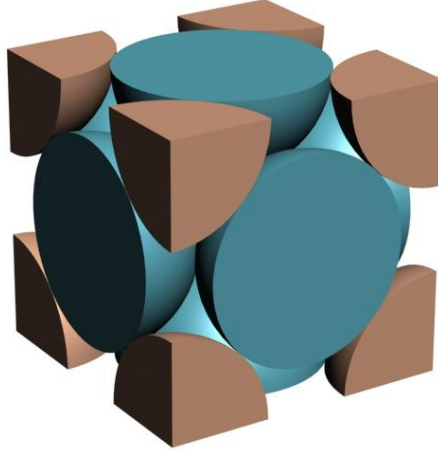


Figura 4-41. Disposición FCC (Cúbica centrada en las caras).

Debido a la simetría del RVE, el modelo nos conducirá a una ley de comportamiento isótropa, quedando sus propiedades definidas mediante 2 constantes (2–16):

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (C_{11} - C_{12})/2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ (C_{11} - C_{12})/2 \\ (C_{11} - C_{12})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{13} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}$$

#### 4.2.1 Modelo y mallado

A continuación, se muestran los mallados propuestos para la resolución mediante el método de los elementos finitos del modelo de inclusiones esféricas. Los modelos se han realizado de forma paramétrica, obteniendo el diámetro de las esferas  $d_e$  a partir de una fracción volumétrica de inclusiones  $v_f$  mediante la ecuación:

$$d_e = \sqrt[3]{\frac{12v_f a_1 a_2 a_3}{\pi}} \quad (4-3)$$

También se hará un análisis de la sensibilidad del mallado, considerando dos tamaños distintos: un mallado más *grueso* y otro ligeramente más *fino*. Se dejará que ANSYS realice el mallado automáticamente a través de la opción *smartsizing*.

Para conseguir una correcta adaptación a la geometría del modelo será necesario el uso de *elementos tetraédricos*. Tal y como se recomienda para esta geometría, se usarán *elementos cuadráticos*, en concreto el tipo de elemento SOLID186 que incorpora ANSYS. El uso de elementos cuadráticos nos permitirá reducir el número de elementos en comparación con el mallado realizado para el modelo de fibra continua.

A continuación, se muestran ambos mallados para distintas fracciones volumétricas de fibra.



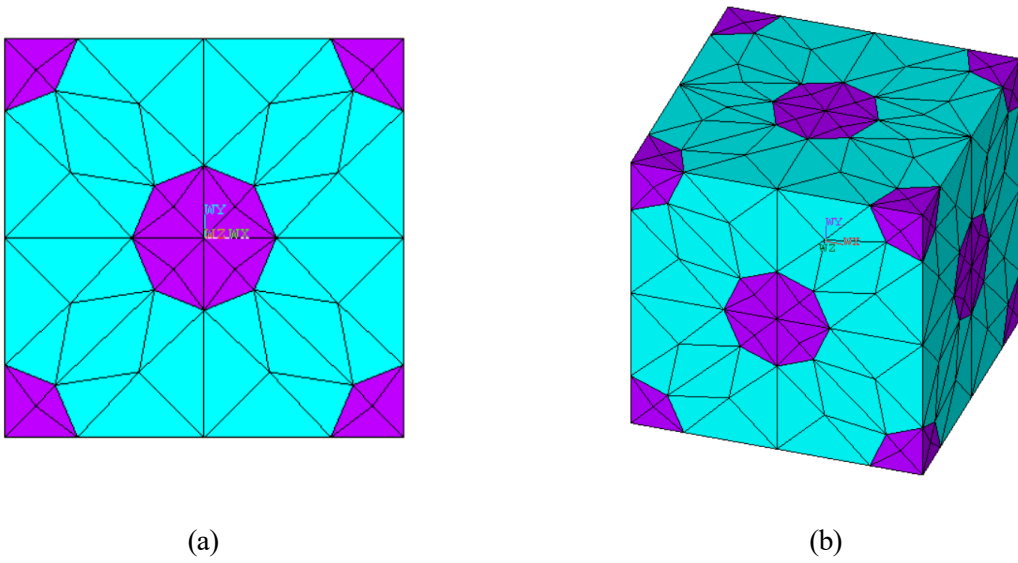


Figura 4-42. Mallado grueso del modelo para una fracción volumétrica de fibra pequeña  $v_f = 0.10$ .

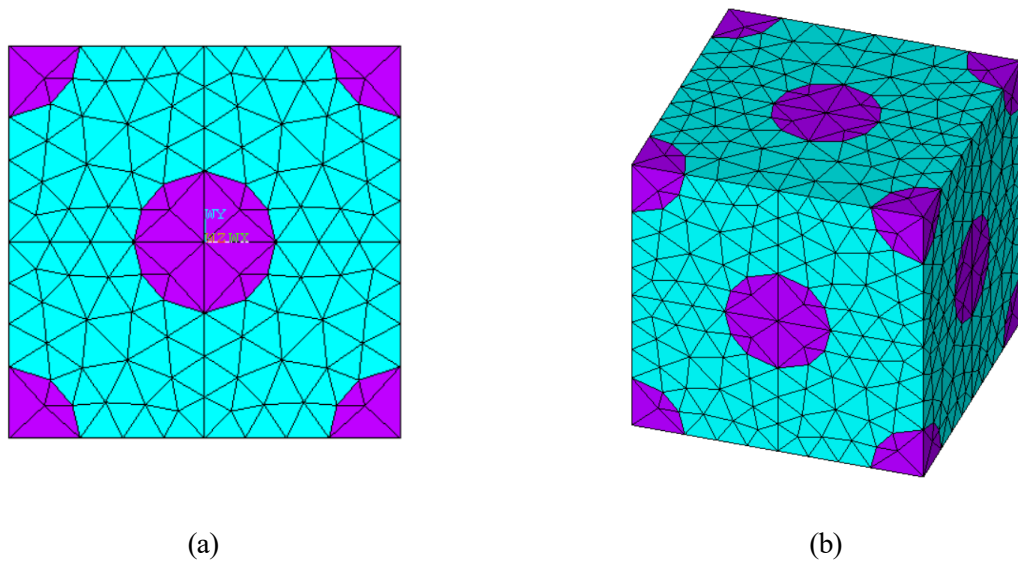
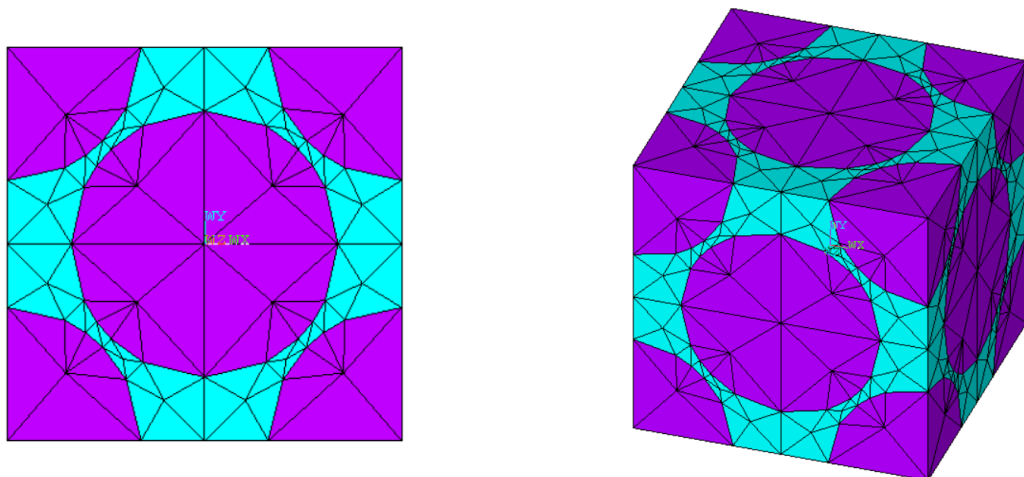


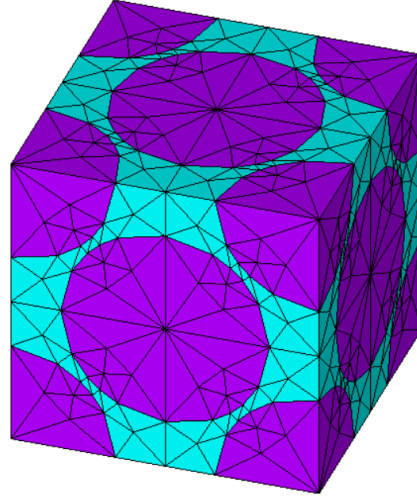
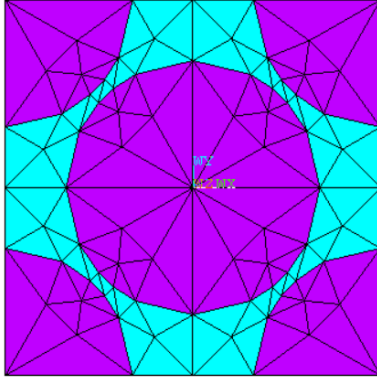
Figura 4-43. Mallado fino del modelo para una fracción volumétrica de fibra pequeña  $v_f = 0.10$ .



(a)

(b)

Figura 4-44. Mallado grueso del modelo para una fracción volumétrica de fibra elevada  $\nu_f = 0.65$ .



(a)

(b)

Figura 4-45. Mallado fino del modelo para una fracción volumétrica de fibra elevada  $\nu_f = 0.65$ .

## 4.2.2 Obtención de la matriz de rigidez

Para una fracción volumétrica de las inclusiones de  $\nu_f = 0.5$  se resolverán cada uno de los 6 problemas con deformación unitaria  $\epsilon_i = 1$ , de igual forma a como se hizo para el modelo de fibra continua. En este caso se comparará el tensor de rigidez obtenido mediante el método de los elementos finitos,  $\bar{\mathbf{C}}_{FEM}$ , con el tensor teórico de la ley de comportamiento isótropa (2-16).

Debido a la simetría del problema sólo se representarán gráficamente las soluciones de los problemas elásticos asociados a la obtención de la primera y cuarta columna del tensor de rigidez, esto es, los problemas en los que el RVE se somete a una deformación normal unitaria  $\epsilon_1 = 1$  y a una deformación tangencial unitaria  $\gamma_{23} = 1$ , por separado.

### 4.2.2.1 Primera, segunda y tercera columna: deformación normal

- Primera columna:

$$\bar{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 442.1278 \\ 161.9157 \\ 161.8528 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

$$\bar{\epsilon}_i = \begin{bmatrix} 0.9996 \\ 0.0002 \\ 0.0003 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

- Segunda columna:

$$\bar{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 161.9425 \\ 442.4599 \\ 161.9845 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad \bar{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 1.0000 \\ 0.0001 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

- Tercera columna:

$$\bar{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 161.8523 \\ 161.9577 \\ 442.2005 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad \bar{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} 0.0002 \\ 0.0001 \\ 0.9998 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

Se representarán gráficamente los resultados ante una deformación normal  $\epsilon_1 = 1$ , siendo el resto de problemas completamente equivalentes a este.

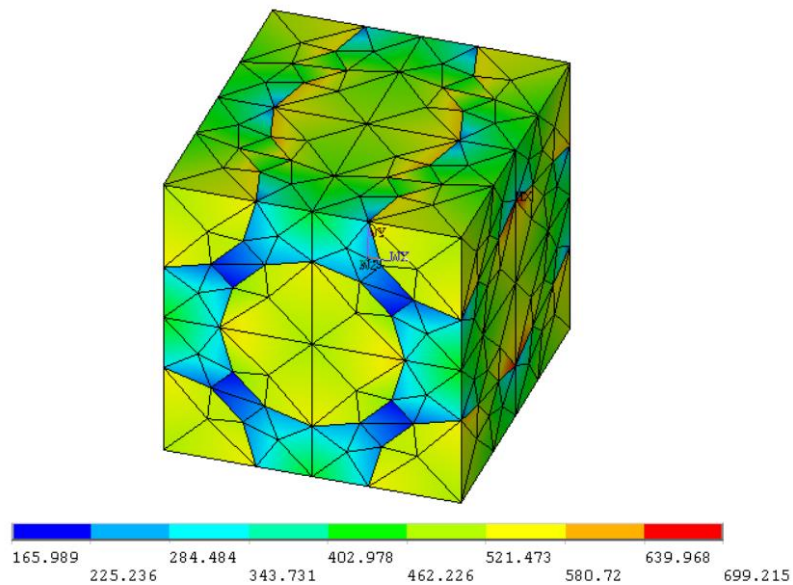


Figura 4-46. Tensión  $\sigma_1$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ .

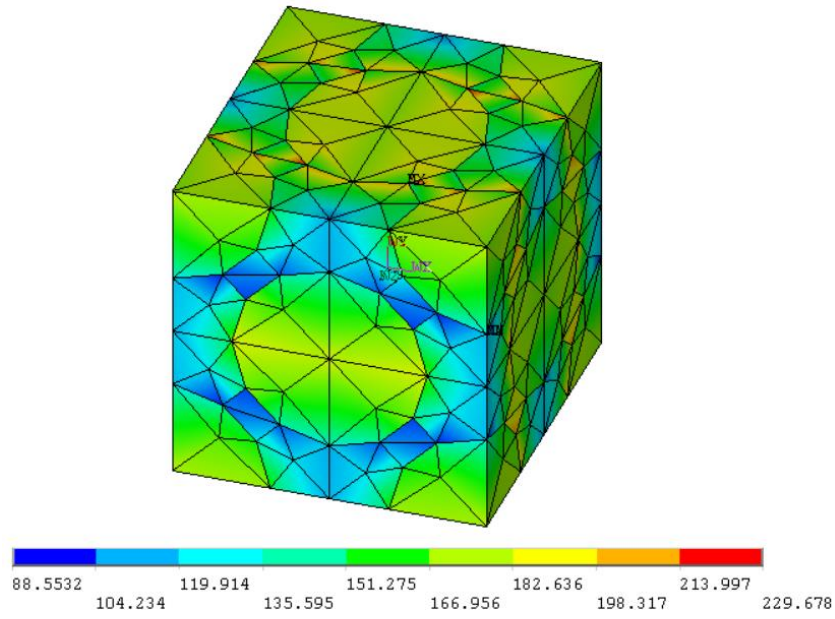


Figura 4-47. Tensión  $\sigma_2$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ .

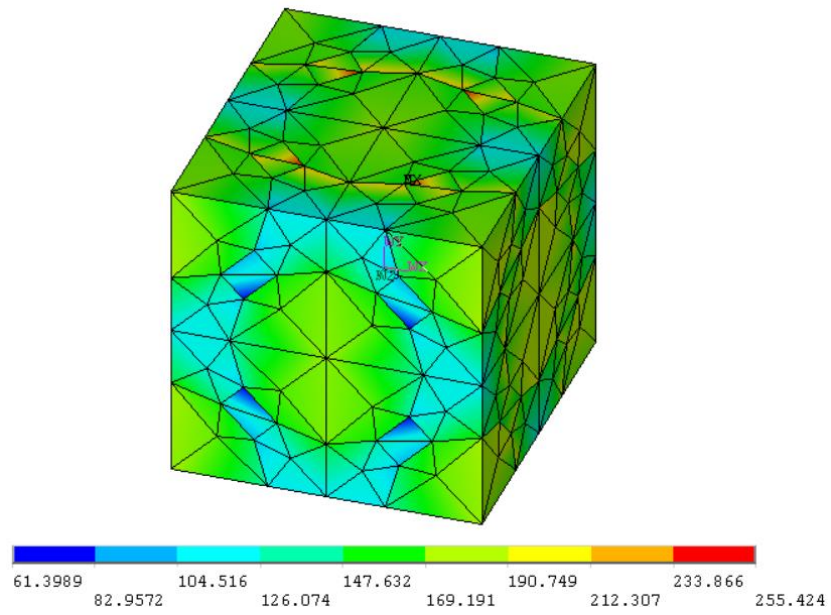


Figura 4-48. Tensión  $\sigma_3$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ .

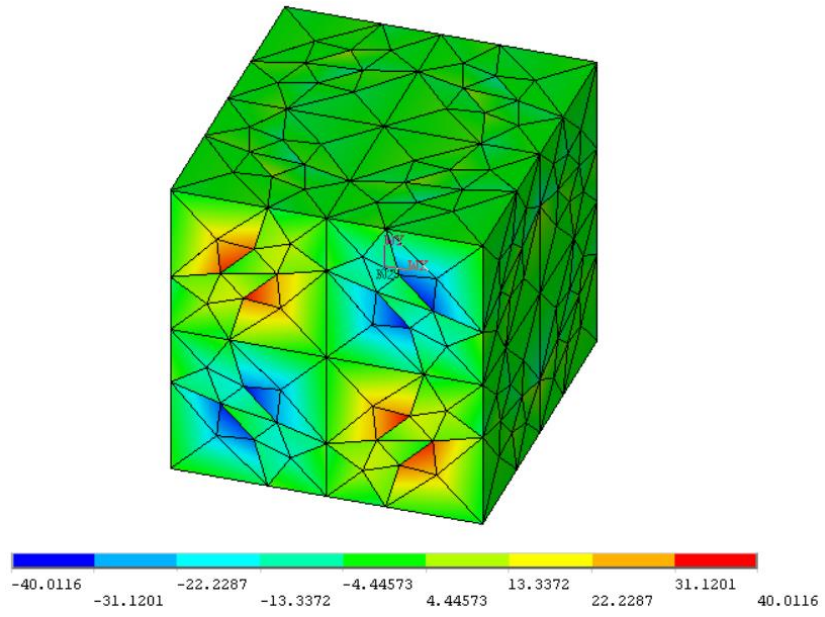


Figura 4-49. Tensión  $\sigma_{23}$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ .

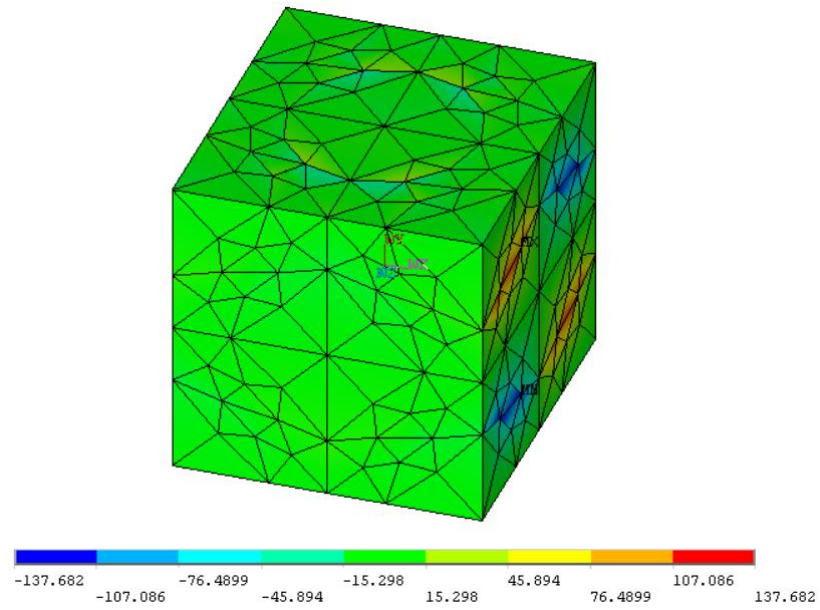


Figura 4-50. Tensión  $\sigma_{13}$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ .



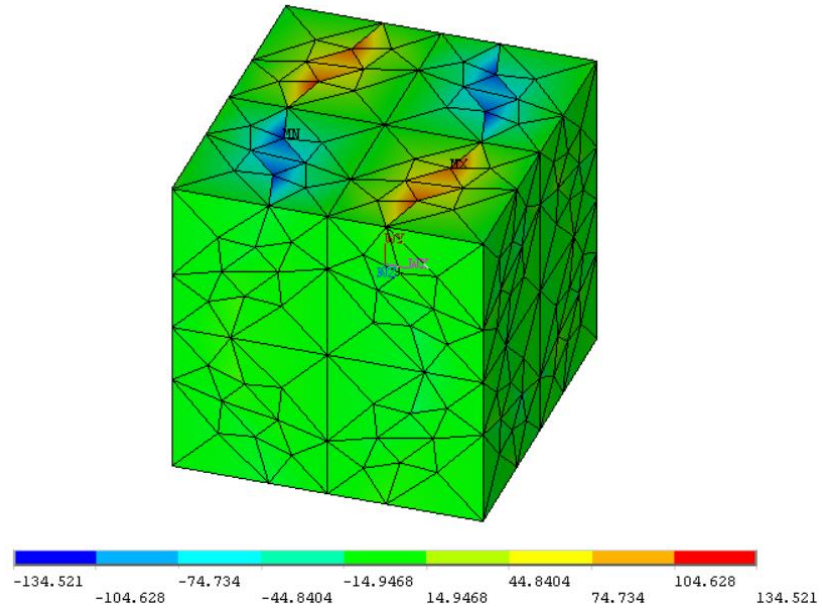


Figura 4-51. Tensión  $\sigma_{12}$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ .

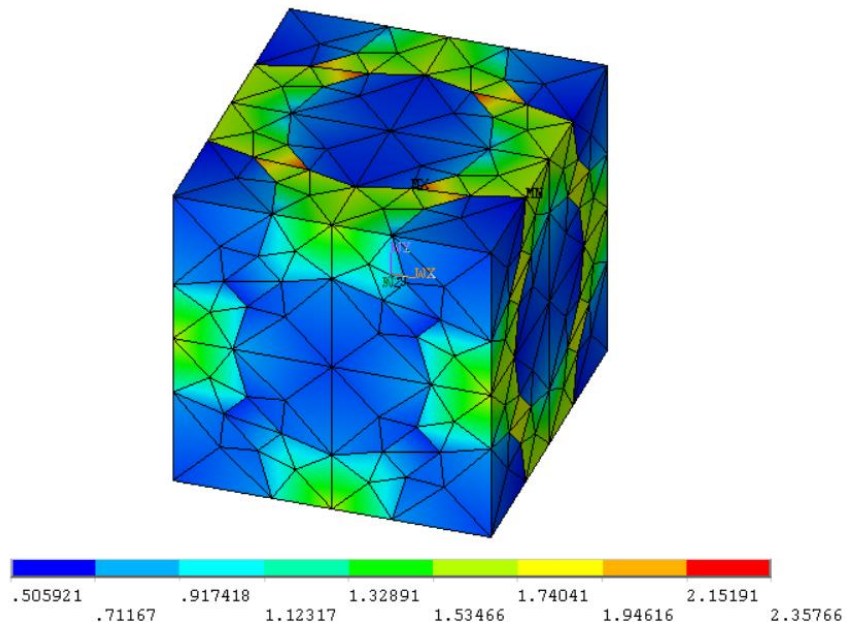


Figura 4-52. Deformación  $\epsilon_1$  en cada elemento para una deformación media  $\bar{\epsilon}_1 = 1$ .

#### 4.2.2.2 Cuarta, quinta y sexta columna: deformación tangencial

- Cuarta columna:

$$\overline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 146.4067 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad \overline{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 1.0006 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

- Quinta columna:

$$\overline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 146.2282 \\ 0.0000 \end{bmatrix} \quad \overline{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 1.0007 \\ 0.0000 \end{bmatrix}$$

- Sexta columna:

$$\overline{\sigma}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 146.4234 \end{bmatrix} \quad \overline{\varepsilon}_i = \begin{bmatrix} 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 0.0000 \\ 1.0007 \end{bmatrix}$$

Se representarán gráficamente los resultados ante una tangencial deformación tangencial media  $\overline{\gamma}_{23} = 1$ , siendo el resto de problemas completamente equivalentes a este.

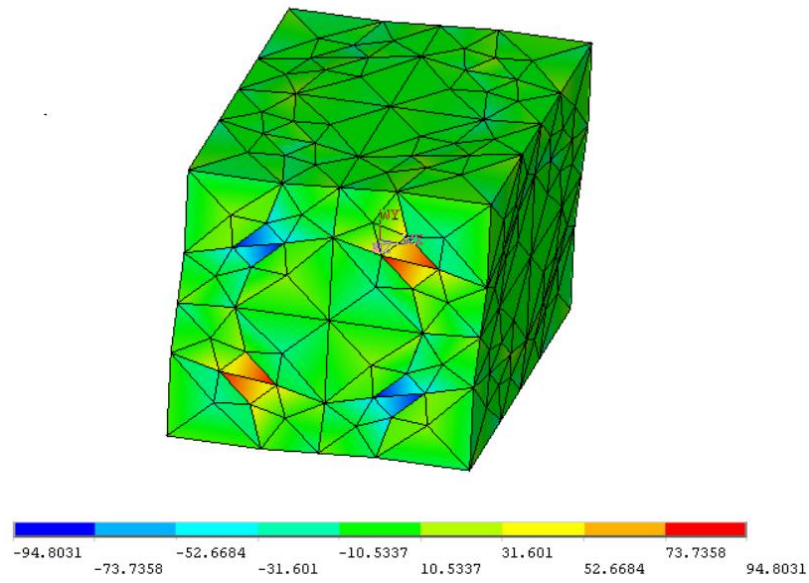


Figura 4-53. Tensión  $\sigma_1$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma_{23}} = 1$ .

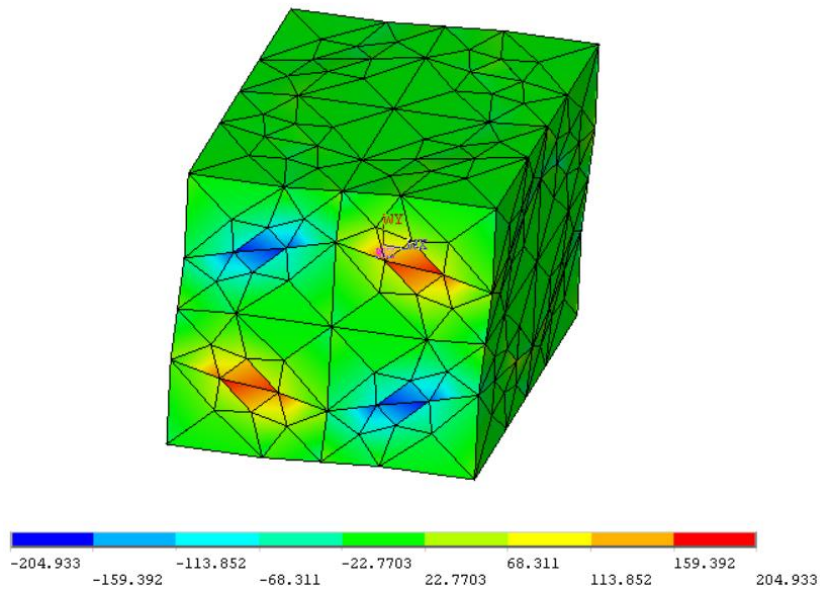


Figura 4-54. Tensión  $\sigma_2$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma_{23}} = 1$ .



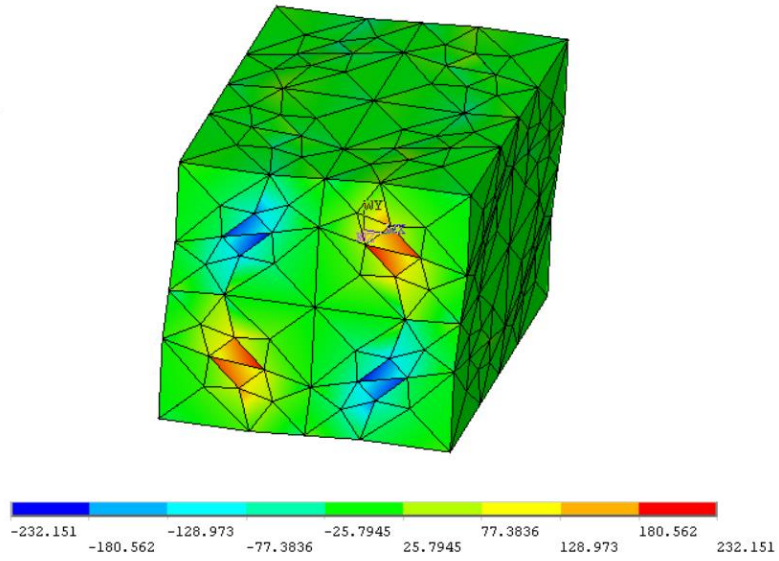


Figura 4-55. Tensión  $\sigma_3$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma_{23}} = 1$ .

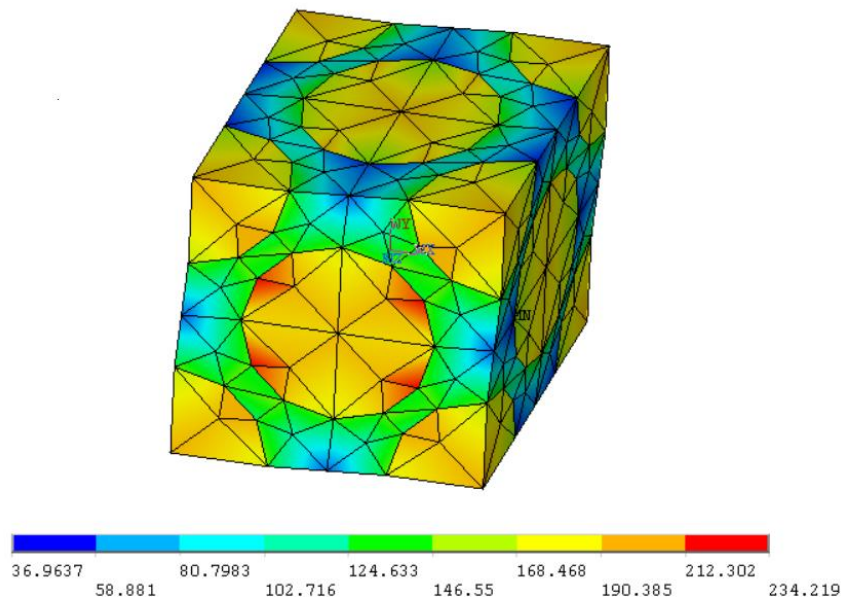


Figura 4-56. Tensión  $\sigma_{23}$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma_{23}} = 1$ .

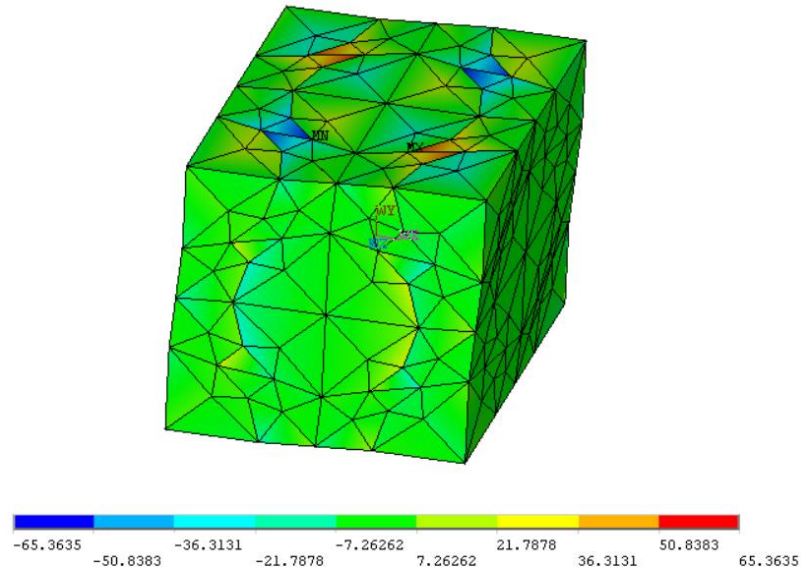


Figura 4-57. Tensión  $\sigma_{13}$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma_{23}} = 1$ .

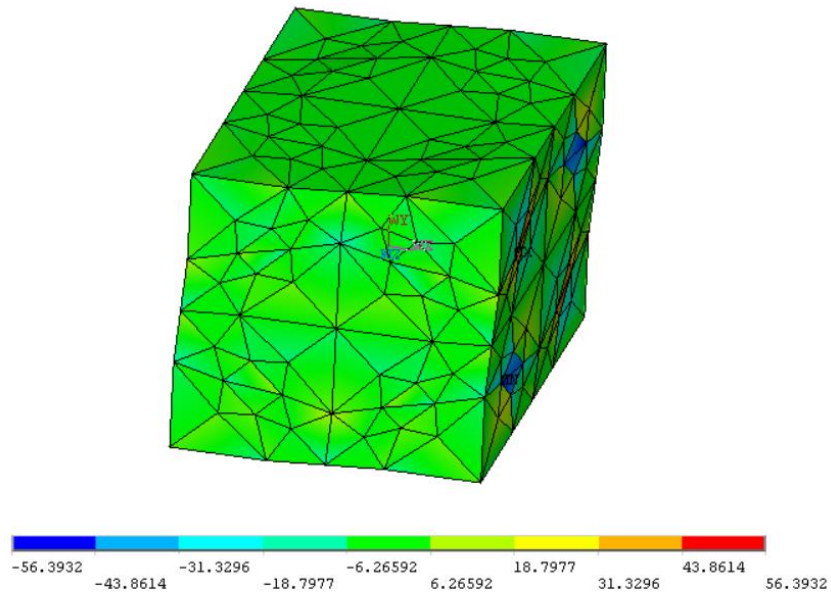


Figura 4-58. Tensión  $\sigma_{12}$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma_{23}} = 1$ .

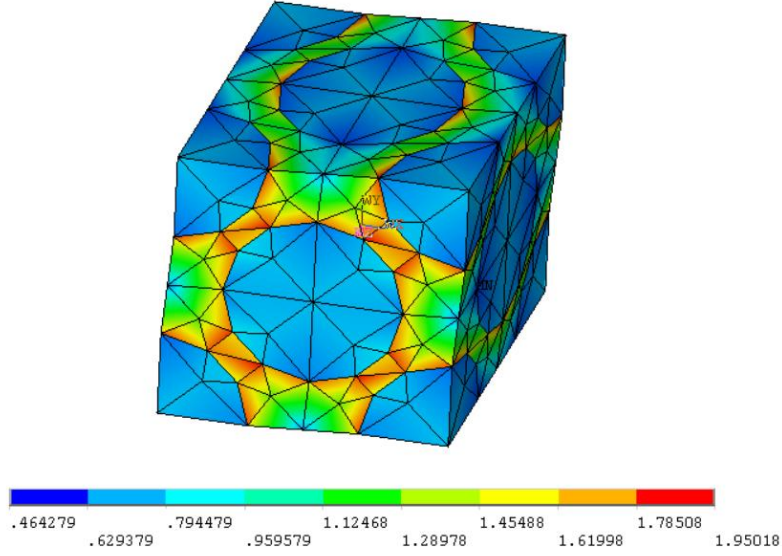


Figura 4-59. Deformación  $\epsilon_{23}$  en cada elemento para una deformación media  $\overline{\gamma_{23}} = 1$ .

Para formar el tensor  $\overline{\mathbf{C}}_{TEO}$  se han utilizado las componentes de  $\overline{\mathbf{C}}_{FEM}$ :  $C_{11}$  y  $C_{21}$ . Puede observarse que el tensor obtenido se ajusta con buena exactitud a una ley de comportamiento isótropa.

$$\mathbf{C}_{FEM} = \begin{bmatrix} 442.1 & 161.9 & 161.9 & 0 & 0 & 0 \\ 161.9 & 442.5 & 162.0 & 0 & 0 & 0 \\ 161.9 & 162.0 & 442.2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 146.4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 146.2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 146.4 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}_{TEO} = \begin{bmatrix} 442.1 & 161.9 & 161.9 & 0 & 0 & 0 \\ 161.9 & 442.1 & 161.9 & 0 & 0 & 0 \\ 161.9 & 161.9 & 442.1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 140.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 140.1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 140.1 \end{bmatrix}$$

### 4.2.3 Obtención de las constantes del material

En este apartado se representarán gráficamente las propiedades efectivas del material frente a la fracción volumétrica de fibra  $v_f$ . Al tratarse de un modelo isótropo el comportamiento elástico del modelo vendrá dado por 2 constantes: el módulo de Young  $E$  y el módulo de cizalladura  $G$ .

Los resultados se comparan con los modelos micromecánicos para compuestos macroscópicamente isótropos y homogéneos, así como con modelos auto consistentes de inclusiones esféricas, todos ellos expuestos en la sección 2.3. Los modelos utilizados han sido el modelo de Hashin-Shtrikman, que nos da unos límites superior e inferior, y el modelo de

#### 4.2.3.1 Módulo de Young $E$

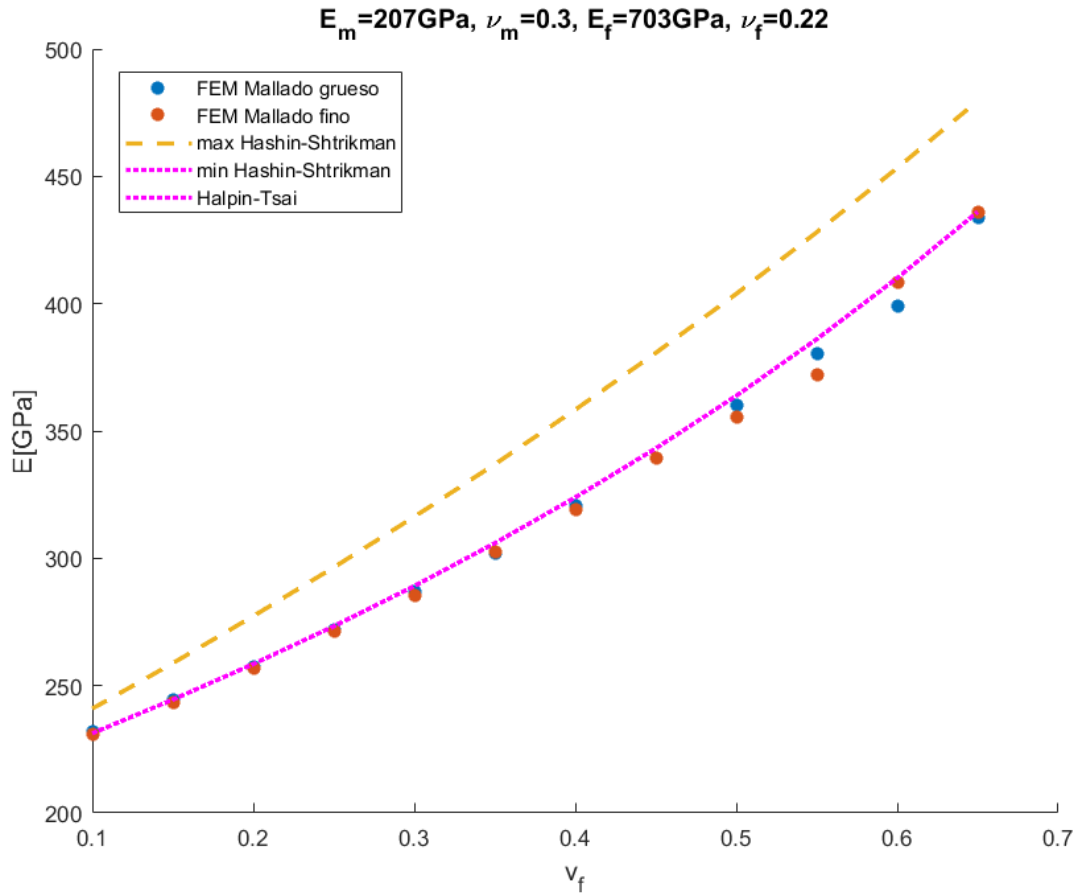


Figura 4-60.  $E$  frente a  $v_f$  para los resultados del FEM en inclusiones esféricas con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.

En primer lugar, notamos que el mínimo establecido por el modelo de Hashin-Shtrikman y los resultados del modelo de Halpin-Tsai basado en la solución de Kerner coinciden, consideración de la que ya se percataron en la literatura. Podemos decir por tanto que las inclusiones de tipo esféricas son las menos eficientes, pues dan los valores mínimos de  $E$  y  $G$  para una fracción volumétrica de refuerzo dada.

Podemos ver que las soluciones obtenidas se ajustan con bastante precisión al modelo auto consistente de Kerner.

#### 4.2.3.2 Módulo de cizalladura $G$

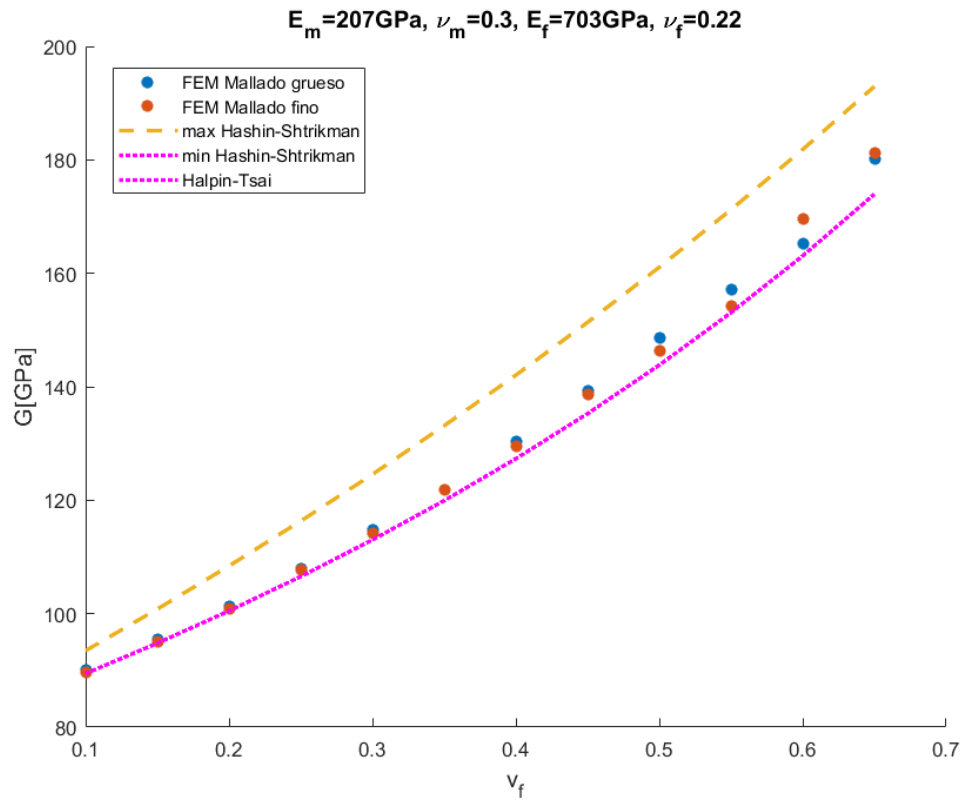


Figura 4-61.  $G$  frente a  $v_f$  para los resultados del FEM en inclusiones esféricas con distintos refinamientos del mallado y los modelos micromecánicos analíticos especificados.

El módulo de cizalladura también se ajusta considerablemente bien a las ecuaciones de Halpin-Tsai basadas en el modelo de Kerner, aunque la precisión empeora para fracciones volumétricas mayores.



# 5 RESUMEN Y CONCLUSIONES

---

## 5.1 Resumen

Se han presentado y explicado los distintos tipos de modelos micromecánicos que han permitido predecir el comportamiento de los materiales compuestos durante el último siglo. Se le ha dado especial relevancia a los modelos de fibra continua e inclusiones esféricas, que son las configuraciones con las que se han trabajado en este documento. Antes de pasar a la implementación numérica de los modelos, se han desarrollado el concepto de volumen representativo y la técnica de homogenización que nos permite obtener las propiedades del compuesto a partir de estas celdas unitarias. Una vez expuesto y cerrado el problema, se ha utilizado un software de elementos finitos para su resolución. Para automatizar esta tarea se han elaborado varias rutinas de obtención y análisis de datos mediante los programas comerciales. ANSYS y MATLAB. En el documento se recogen los resultados numéricos y gráficos del problema elástico, así como las gráficas comparativas entre las propiedades obtenidas mediante estos datos y las obtenidas a través de modelos micromecánicos analíticos equivalentes. Todo esto nos ha permitido llegar a conclusiones no solo sobre la validez de los modelos obtenidos por otros autores, sino también sobre la eficacia del método de los elementos finitos para obtener las propiedades mecánicas de distintos tipos de materiales compuestos.

## 5.2 Conclusiones

- Las condiciones de contorno (3–7) nos permiten conseguir con gran precisión un estado de deformación cuyos valores medios vienen dados. Esto se desprende de los valores obtenidos del vector  $\bar{\epsilon}_i$  durante la obtención de cada columna, tanto para el caso de fibra continua como el de inclusiones esféricas.
- El criterio de tomar las disposiciones de máxima compacidad en ambos modelos es el más adecuado para recrear una distribución aleatoria tanto de las fibras como de las inclusiones. En el caso del modelo de fibra continua, la disposición hexagonal le otorga un comportamiento transversalmente isótropo, característico de las distribuciones aleatorias. Además, las soluciones de Hermans y Kerner parten de un modelo auto consistente en el que fibra e inclusiones esféricas vienen rodeadas de matriz, no teniendo en cuenta cómo se disponen estas en el medio; esto acerca más estos modelos a predecir las distribuciones aleatorias, y se observa su gran cercanía con los resultados aquí obtenidos para una distribución hexagonal.
- La ley de mezclas es válida para estimar las propiedades  $E_1$  y  $\nu_{12}$  en compuestos de fibra continua con suficiente precisión. Esto viene justificado no solo por los resultados obtenidos en las gráficas comparativas, sino por el campo de tensiones y deformaciones de la solución del problema que surge al imponer una deformación media  $\bar{\epsilon}_1$ . Aquí se observa un estado de isodeformación en el volumen, que es la hipótesis que empleaba la ley de mezclas para obtener estas dos constantes ingenieriles.
- La ley de mezclas inversa no es válida para estimar las propiedades  $E_2$ ,  $G_{12}$  y  $G_{23}$  en compuestos de fibra continua con suficiente precisión. A diferencia de la estimación de  $E_1$  y  $\nu_{12}$ , las hipótesis supuestas por la ley de mezclas inversa no se cumplen en este caso. Por lo tanto, son preferibles usar los resultados de otros modelos, como los resultados de Hermans para fibra continua.
- A la hora de estimar las propiedades  $E_2$ ,  $G_{12}$  y  $G_{23}$ , los resultados de Hermans ofrecen una buena aproximación para valores de fracción volumétrica de fibra no demasiado elevados. Para  $\nu_f$  mayores, la ley de mezclas modificada es preferible.

- El modelo de Kerner se ajusta con gran precisión a los resultados obtenidos para inclusiones esféricas en disposición FCC (Cúbica Centrada en las Caras). Además, las predicciones de este modelo coinciden con el límite inferior dado por el modelo de Hashin-Shtrikman para compuestos globalmente homogéneos e isotrópicos, luego se puede concluir que las inclusiones esféricas es el tipo de inclusión menos eficiente en cuanto a la rigidez que puede ofrecer el material para una misma  $v_f$ .

### 5.3 Trabajos futuros

Los métodos aquí empleados para estimar las propiedades mecánicas de compuestos usando el método de los elementos finitos han demostrado ser una potente y versátil herramienta. Siguiendo la idea detrás de la modelización micromecánica se proponen los siguientes trabajos para sacarle el máximo partido:

- Proponer modelos micromecánicos para compuestos de fibra corta y comparar los resultados numéricos con los obtenidos analíticamente. En este caso habría que tener también en cuenta la dependencia con el factor de forma de la fibra,  $\frac{l}{d}$ . En el límite, podría comprobarse que nos aproximamos a los resultados obtenidos para fibra continua.
- Proponer modelos micromecánicos para inclusiones de tipo elipsoidal y comparar los resultados numéricos con los obtenidos a través el método de Mori-Tanaka. En este caso, los límites corresponden al caso de una inclusión esférica y al de una fibra continua.
- Modelar la interfase entre matriz e inclusión para analizar su influencia en las propiedades mecánicas del material. Esto conduciría a modelos micromecánicos más realísticos.

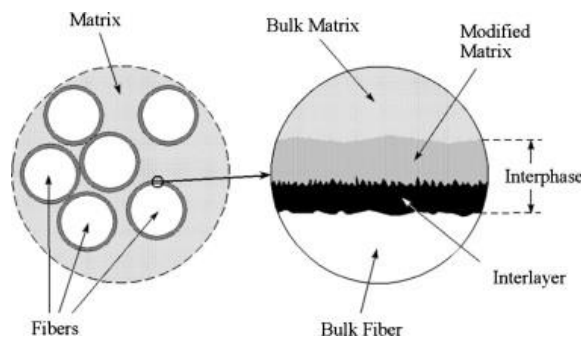


Figura 5-1. Caracterización de la interfase entre fibra y matriz.

- Elaborar modelos para compuestos basados en trenzado de fibras, como los mostrados en la figura.

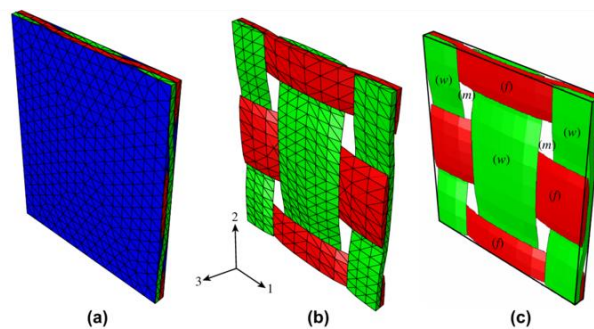


Figura 5-2. Ejemplos de RVE para compuestos trenzados.



# REFERENCIAS

---

- [1] W. Voigt, «Ueber die Beziehung zwischen den beiden Elasticitätsconstanten isotroper Körper,» *Ann. Phys.*, nº 274, pp. 573-587, 1889.
- [2] A. Reuss, «Berechnung der Fließgrenze von Mischkristallen auf Grund der Plastizitätsbedingung für Einkristalle,» *Z. angew. Math. Mech.*, vol. 9, pp. 49-58, 1929.
- [3] R. Hill, «Elastic Properties of Reinforced Solids: Some Theoretical Principles,» *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 11, pp. 357-372, 1963.
- [4] Z. Hashin y S. Shtrikman, «A Variational Approach to the Theory of the Elastic Behaviour of Multiphase Materials,» *J. Mechs. Phys. Solids*, vol. 11, pp. 127-140, 1963.
- [5] R. Hill, *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 12, p. 199, 1964.
- [6] J. J. Hermans, *Koninkl. Nederl. Akademie Van Wetenschappen-Amsterdam, Proceedings, Series B*, vol. 70, p. 1, 1967.
- [7] E. N. Kerner, *Proc. Phys. Soc. London*, vol. 69B, p. 808, 1956.
- [8] H. Cox, «The Elasticity and Strength of Paper and other Fibrous Materials,» *British Journal of Applied Physics*, vol. 3, pp. 72-79, 1952.
- [9] J. Halpin y J. Kardos, «The Halpin-Tsai Equations: A Review,» Materials Research Laboratory, Missouri, 1976.
- [10] J. Aboudi, «Micromechanical analysis of composites by the method of cells,» *Applied Mechanics Reviews*, vol. 42, nº 7, pp. 193-221, 1989.
- [11] C. L. Tucker y E. Liang, «Stiffness predictions for unidirectional short-fiber composites: Review and evaluation,» *Composites Science and Technology*, nº 59, pp. 655-671, 1999.
- [12] S. B. R. Devireddy y S. Biswas, «Effect on Fiber Geometry and Representative Volume Element on Elastic and Thermal Properties of Unidirectional Fiber-Reinforced Composites,» Hindawi Publishing Corporation, Rourkela, 2014.
- [13] K. P. Babu, P. Mohite y C. S. Upadhyay, «Development of an RVE and its stiffness predictions based on mathematical homogenization theory for short fibre composites,» Indian Institute of Technology, Kanpur, 2017.

- [14] F. París, Teoría de la elasticidad, Tercera ed., Sevilla: Grupo de Elasticidad y Resistencia de Materiales, 2000.
- [15] E. J. Barbero, Finite Element Analysis of Composite Materials Using ANSYS®, Second ed., Boca Raton: CRC Press, Taylor & Francis Group, 2014.
- [16] A. K. Kaw, Mechanics of Composite Materials, Boca Raton: CRC, Taylor & Francis, 2006.
- [17] L. P. Kollár y G. S. Springer, Mechanics of Composite Structures, Cambridge: Cambridge University Press, 2003.
- [18] C. L. Tucker, «Stiffness Predictions for Unidirectional Short-Fiber Composites,» University of Illinois, Urbana, 1999.
- [19] P. M. Suquet, «Elements of Homogenization for Inelastic Solid Mechanics,» Université de Sciences et Technique du Languedoc, Montpellier, 1987.
- [20] R. Luciano y E. Sacco, «Variational Methods for the Homogenization of Periodic Heterogeneous Media,» *European Journal of Mechanics*, vol. 17, nº 4, pp. 599-617, 1998.
- [21] J. E. Torres Enk, «Caracterización de Materiales Compuestos mediante el Método de Diseño de Experimentos,» Universidad EAFIT, Departamento de Ingeniería Mecánica, Medellín, 2006.
- [22] C. D. González Martínez, «Dos Modelos Micromecánicos de Deformación con Daño en Materiales Compuestos,» Universidad Politécnica de Madrid, E.T.S.I de Caminos, Departamento de Ciencia de Materiales, Madrid, 2000.
- [23] B. Harris, Engineering Composite Materials, Londres: The Institute of Materials, 1999.

## A. Rutinas de ANSYS

En este anexo se recogen los códigos de ANSYS en lenguaje APDL que permiten resolver los 6 problemas con deformación media impuesta y así obtener las 6 columnas del tensor de rigidez. Cada uno de los códigos principales, *FibraContinua.mac* e *InclusionesEsfericas.mac* nos permite, tanto para el modelo de fibra continua como para el de inclusiones esféricas, obtener dicho tensor para distintos valores de  $\nu_f$  comprendidos entre un mínimo y un máximo con un cierto intervalo de separación. También se muestra el código *EPELRECOVER.mac*, una modificación de su análogo *SRECOVER.mac*. Estos nos implementan las ecuaciones (3–10) y (3–9) para obtener las componentes de la deformación y la tensión media, respectivamente. Por otra parte, las condiciones de contorno se implementan mediante *ceRVE.mac*.

### FibraContinua.mac

```
/BATCH
/CLEAR

!RVE disposición hexagonal, fibra continua y circular.

!DEFINICIÓN DE VARIABLES
pi=acos(-1)

!Propiedades de la matriz [GPa]
Em=3.5
num=0.35

!Propiedades de la fibra
Ef=73
nuf=0.22

!Geometría del RVE
a2=1/2                                !Semilongitud en Eje X. Se toma referencia unidad
a1=a2/4                                !Semilongitud en Eje Z. Paralelo a la dirección de las fibras.
a3=a2*sqrt(3)                          !Semilongitud en Eje Y. Viene dado por la disposición hexagonal
```

*CFOPEN,ResultadosFibra,txt	!Los resultados se guardarán en el archivo especificado
*DO,vf,0.10,0.75,0.05	!Realizamos un ciclo para distintas fracciones de volumen de fibra.
df=sqrt(vf*8*a2*a3/pi)	!Diámetro de la fibra. Viene dada por vf y la disposición hexagonal
/PREP7	!Módulo de preprocesado
!Vamos a crear un único cuadrante del volumen de control. Luego aplicaremos simetría en todas las direcciones	
VCLEAR,ALL	!Limpiamos modelo de la iteración anterior
VDELE,ALL,,1	
!Matriz	
BLOCK,0,a2,0,a3,0,a1	!Bloque rectangular
CYL4,0,0,df/2, , , ,a1	!Creamos cilindros
CYL4,a2,a3,df/2, , , ,a1	
VSBV,1,ALL	!Realizamos la operación de resta
NUMCMP,VOLU	!Reordenamos numeración
VSEL,NONE	
!Fibra	
BLOCK,0,a2,0,a3,0,a1	!Bloque rectangular
CYL4,0,0,df/2, , , ,a1	!Creamos cilindros
CYL4,a2,a3,df/2, , , ,a1	
VINP,ALL	!Intersectamos bloque y cilindros
NUMCMP,VOLU	!Reordenamos numeración
ALLSEL	
VGLUE,ALL	!Unimos fibra y matriz para que compartan la interfase
NUMCMP,VOLU	!Reordenamos numeración
VSEL,S,VOLU,,1	
CM,MATRIZ,VOLU	!Agrupamos la matriz
VSEL,S,VOLU,,2,3	!Agrupamos la fibra

CM,FIBRA,VOLU	
ALLSEL,BELOW,AREA	!Agrupamos el área de contacto entre matriz y fibra
ASEL,U,LOC,X,0	
ASEL,U,LOC,X,a2	
ASEL,U,LOC,Y,0	
ASEL,U,LOC,Y,a3	
ASEL,U,LOC,Z,0	
ASEL,U,LOC,Z,a1	
CM,INTERFASE,AREA	
!Definición de materiales	
MP,EX,1,Em	!Matriz isótropa
MP,PRXY,1,num	
MP,EX,2,Ef	!Fibra isótropa
MP,PRXY,2,nuf	
!Mallado de la cara	
ET,1,PLANE182	!2-D 4-Node Structural Solid
MSHKEY,0	!Mallado libre
MSHAPE,1,2D	!Elementos triangulares
SMRTSIZE,6	!Tamaño del mallado
CMSEL,S,INTERFASE	
ALLSEL,BELOW,AREA	
LSEL,R,LOC,Z,a1	
LESIZE,ALL,a2/10	!Refinamos el mallado en la interfase
ASEL,S,LOC,Z,a1	
AMESH,ALL	
!Mallado del volumen	
ET,2,SOLID185	!3-D 8-Node Structural Solid
ALLSEL	

LSEL,U,LOC,Z,a1	
LSEL,U,LOC,Z,0	
LESIZE,ALL,0,0,2	!Especificamos divisiones del mallado en la direccion de la fibra
MAT,1	
VSWEEP,MATRIZ	!Mallado en 3D mediante barrido
!LOCAL,11,0,0,0,0,-90,0,-90 las fibras	!Creamos sistema de referencia local para la correcta orientación de las fibras
MAT,2	
LOCAL,11,0,0,0,0,-90,0,-90	¡Sistema de coordenadas local para orientación del material de la fibra
ESYS,11	
VSWEEP,FIBRA	
ACLEAR,ALL	
!Simetría	
ALLSEL	
VSYMM,X,ALL	
VSYMM,Y,ALL	
VSYMM,Z,ALL	
NUMMRG,ALL	!Unificamos los nodos coincidentes
/PNUM,MAT,1	!Visualización
/NUMBER,1	
!/ANG,1	
/VIEW,1,1,2,3	
/REP,FAST	
/REPLOT	
/RGB,INDEX,100,100,100,0	
/RGB,INDEX,80,80,80,13	
/RGB,INDEX,60,60,60,14	
/RGB,INDEX,0,0,0,15	

FINISH

/SOLU

ANTYPE,STATIC

!Tipo de análisis

CSYS,0

!Establecemos el sistema de coordenadas cartesianas

ceRVE,a1,a2,a3,1,0,0,0,0

!Primera columna: deformación unitaria eje de la fibra Z

SOLVE

FINISH

/POST1

SRECOVER

EPELRECOVER

\*VWRITE,vf,EPELzz0,EPELxx0,EPELyy0,EPELxy0,EPELyz0,EPELxz0,Szz0,Sxx0,Syy0,Sxy0,Syz0,Sxz0  
(F10.2,12F10.4,\$)

FINISH

/SOLU

ceRVE,a1,a2,a3,0,1,0,0,0

!Segunda columna: deformación unitaria eje transversal X

SOLVE

FINISH

/POST1

SRECOVER

EPELRECOVER

\*VWRITE,EPELzz0,EPELxx0,EPELyy0,EPELxy0,EPELyz0,EPELxz0,Szz0,Sxx0,Syy0,Sxy0,Syz0,Sxz0  
(12F10.4,\$)

FINISH

/SOLU

ceRVE,a1,a2,a3,0,0,1,0,0

!Tercera columna: deformación unitaria eje transversal Y

SOLVE

FINISH

/POST1

SRECOVER

EPELRECOVER

\*VWRITE,EPELzz0,EPELxx0,EPELyy0,EPELxy0,EPELyz0,EPELxz0,Szz0,Sxx0,Syy0,Sxy0,Syz0,Sxz0  
(12F10.4,\$)

FINISH

```

/SOLU
ceRVE,a1,a2,a3,0,0,0,1,0,0      !Cuarta columna: deformación unitaria ejes XY
SOLVE
FINISH
/POST1
SRECOVER
EPELRECOVER
*VWRITE,EPELzz0,EPELxx0,EPELyy0,EPELxy0,EPELyz0,EPELxz0,Szz0,Sxx0,Syy0,Sxy0,Syz0,Sxz0
(12F10.4,$)
FINISH

/SOLU
ceRVE,a1,a2,a3,0,0,0,1,0      !Quinta columna: deformación unitaria ejes YZ
SOLVE
FINISH
/POST1
SRECOVER
EPELRECOVER
*VWRITE,EPELzz0,EPELxx0,EPELyy0,EPELxy0,EPELyz0,EPELxz0,Szz0,Sxx0,Syy0,Sxy0,Syz0,Sxz0
(12F10.4,$)
FINISH

/SOLU
ceRVE,a1,a2,a3,0,0,0,0,1      !Sexta columna: deformación unitaria ejes XZ
SOLVE
FINISH
/POST1
SRECOVER
EPELRECOVER
*VWRITE,EPELzz0,EPELxx0,EPELyy0,EPELxy0,EPELyz0,EPELxz0,Szz0,Sxx0,Syy0,Sxy0,Syz0,Sxz0
(12F10.4)
FINISH

*ENDDO

*CFCLOSE

```



## B. Rutinas de MATLAB

Aquí se muestran los códigos de MATLAB que permiten procesar los datos obtenidos mediante ANSYS, así como los que implementan los distintos modelos micromecánicos usados para la comparativa. Las rutinas *ANSYS\_Results\_Fibra.m* y *ANSYS\_Results\_Inclusiones.m* son las que leen los datos de un archivo de texto y procesan la información para obtener el tensor de rigidez, las deformaciones medias de cada problema y las propiedades efectivas del material. Por su parte, cada modelo micromecánico está implementado en una función cuyas variables de entrada son la fracción volumétrica de fibra y las propiedades de los constituyentes.

### ANSYS\_Results\_Fibra.m

```
function [Results,vf,E1,E2,G12,nu12,nu23,G23] = ANSYS_Results_Fibra(file)
A=load(file);
[m,~]=size(A);
Results=struct;
vf=zeros(1,m);
E1=zeros(1,m);
E2=zeros(1,m);
G12=zeros(1,m);
nu12=zeros(1,m);
nu23=zeros(1,m);
G23=zeros(1,m);

for i=1:m

    Results(i).vf=A(i,1);
    Results(i).Strain(1:6,1)=A(i,2:7);
    Results(i).C(1:6,1)=A(i,8:13);
    Results(i).Strain(1:6,2)=A(i,14:19);
    Results(i).C(1:6,2)=A(i,20:25);
    Results(i).Strain(1:6,3)=A(i,26:31);
    Results(i).C(1:6,3)=A(i,32:37);
    Results(i).Strain(1:6,4)=A(i,38:43);
    Results(i).C(1:6,4)=A(i,44:49);
    Results(i).Strain(1:6,5)=A(i,50:55);
    Results(i).C(1:6,5)=A(i,56:61);
    Results(i).Strain(1:6,6)=A(i,62:67);
    Results(i).C(1:6,6)=A(i,68:73);
```

```

Results(i).C_ =zeros(6);

Results(i).C_(1,1)=Results(i).C(1,1);

Results(i).C_(1,2)=Results(i).C(2,1);
Results(i).C_(1,3)=Results(i).C(2,1);
Results(i).C_(2,1)=Results(i).C(2,1);
Results(i).C_(3,1)=Results(i).C(2,1);

Results(i).C_(2,2)=Results(i).C(2,2);
Results(i).C_(3,3)=Results(i).C(2,2);

Results(i).C_(3,2)=Results(i).C(3,2);
Results(i).C_(2,3)=Results(i).C(3,2);

Results(i).C_(4,4)=(Results(i).C(2,2)-Results(i).C(3,2))/2;

Results(i).C_(5,5)=Results(i).C(5,5);
Results(i).C_(6,6)=Results(i).C(5,5);

%Results(i).C_ =abs((Results(i).C_-Results(i).C));

Results(i).E1=Results(i).C(1,1)-2*Results(i).C(2,1)^2/(Results(i).C(2,2)+Results(i).C(3,2));
Results(i).nu12=Results(i).C(2,1)/(Results(i).C(2,2)+Results(i).C(3,2));
Results(i).E2=(Results(i).C(1,1)*(Results(i).C(2,2)+Results(i).C(3,2))-
2*Results(i).C(2,1)^2)*(Results(i).C(2,2)-Results(i).C(3,2))/(Results(i).C(1,1)*Results(i).C(2,2)-
Results(i).C(2,1)^2);
Results(i).nu23=(Results(i).C(1,1)*Results(i).C(3,2)-
Results(i).C(2,1)^2)/(Results(i).C(1,1)*Results(i).C(2,2)-Results(i).C(2,1)^2);
Results(i).G12=Results(i).C(5,5);

vf(i)=Results(i).vf;
E1(i)=Results(i).E1;
E2(i)=Results(i).E2;
G12(i)=Results(i).G12;
nu12(i)=Results(i).nu12;
nu23(i)=Results(i).nu23;
end
G23=E2./(2*(1+nu23));

```